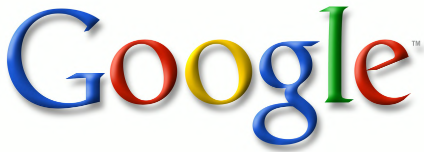
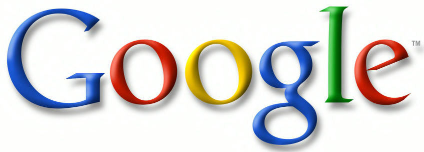
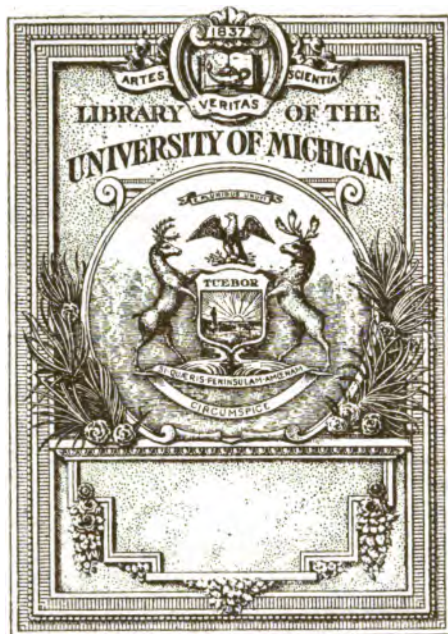



Google


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

---

1940

Alexander Ziwet

# GRUNDZÜGE

EINER

# WISSENSCHAFTLICHEN DARSTELLUNG

DER

# GEOMETRIE DES MASSES.

---

EIN LEHRBUCH

VON


Xavier

**DR. OSKAR SCHLÖMILCH,**

K. S. GEHEIMER RAT A. D.


ERSTES HEFT:

## PLANIMETRIE.

SIEBENTE AUFLAGE.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.


LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Vorwort zur dritten und vierten Auflage.

Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage bin ich von so vielen Seiten her mit brieflichen Bemerkungen über das vorliegende Werkchen erfreut worden, dass es mir nicht möglich war, jedem Einzelnen zu antworten; ich spreche daher an dieser Stelle im allgemeinen meinen Dank für alle jene Zuschriften aus. Soweit es ohne grössere Umgestaltung möglich war, habe ich die erwähnten Notizen benutzt, namentlich da, wo es sich um genauere Ausdrucksweise oder bessere Anordnung handelte; zur Mitgabe von Übungsaufgaben, Exkursen u. dergl. konnte ich mich dagegen nicht entschliessen, weil hierdurch das Buch seinen Charakter, nur das Notwendige und dieses ausführlich zu geben, verloren haben würde. Zufolge dieses Prinzips ist auch die trigonometrische Auflösung der kubischen Gleichungen, als nicht notwendig zur Trigonometrie gehörig, weggelassen und dafür die direkte Berechnung der trigonometrischen Funktionen (d. h. die Entwickelung der Reihen für $\sin v$ und $\cos v$) im Anhange zur Trigonometrie gezeigt worden. Dies halte ich nicht gerade für einen überflüssigen Luxus, denn einerseits liegt darin die tiefere Auffassung eines unzweifelhaft in die Geometrie gehörenden Problemes, andererseits braucht man die Anfänge jener Reihen bei den späteren Untersuchungen über sphärische Dreiecke von geringer Krümmung, sowie bei verschiedenen Aufgaben des praktischen Zeichnens, wovon ein Beispiel mitgeteilt worden ist.

Für den Schulgebrauch des Buches wiederhole ich die Bemerkung, dass man beim ersten Unterrichte wohl thun wird, die etwas schwereren Paragraphen 14 und 15 einstweilen zu überschlagen und durch eine, wenn auch weniger strenge, doch fasslichere Erörterung über die Ausmessung gerader Linien zu ersetzen. Ebenso sind die Anhänge (S. 159 und 238) nur für geübtere Leser bestimmt.

Dresden, am 1. September 1868.

**Schlömilch.**

---

# Vorwort zur sechsten und siebenten Auflage.

Da mir bei der vorliegenden neuen Auflage keine Veranlassung zu durchgreifenden Änderungen gegeben war, so habe ich mich auf kleine Verbesserungen beschränkt, welche meistens den sprachlichen Ausdruck betreffen. Die Erscheinungsform des Buches ist dahin abgeändert worden, dass dasselbe nunmehr aus vier Heften besteht, nämlich 1. Planimetrie, 2. ebene Trigonometrie, 3. Stereometrie, 4. sphärische Trigonometrie und deskriptive Geometrie. Für den Schulgebrauch dürfte diese Trennung insofern von Vorteil sein, als sie die Reihenfolge der ebenen Trigonometrie und Stereometrie dem Ermessen des Lehrers überlässt.

Dresden, im Mai 1888.

**Schlömilch.**

# Inhaltsverzeichnis.

# Einleitung.

Die Vorstellung eines nach allen Seiten hin unbegrenzten Raumes bildet die Grundlage aller Untersuchungen, mit denen sich die Geometrie beschäftigt. Vorausgesetzt wird hierbei, dass man die Grundeigenschaften des Raumes kenne; diese sind: 1. Ausdehnung nach den drei verschiedenen Richtungen der Länge, der Breite und der Höhe (Dicke oder Tiefe), welche man die drei Dimensionen des Raumes zu nennen pflegt; 2. Unendlichkeit, sodass also die Möglichkeit räumlicher Gegenstände nirgends aufhört; 3. Stetigkeit (Kontinuität), derzufolge an keiner Stelle eine Unterbrechung des Raumes vorhanden ist; endlich 4. Gleichartigkeit aller Teile des Raumes, vermöge welcher verschiedene Räume als Teile eines und desselben unendlichen Raumes angesehen werden können.

Denkt man sich aus dem unendlichen Raume ein nach allen Seiten hin begrenztes Stück desselben ausgesondert, so erhält man einen geometrischen Körper, die inhaltlose Form eines physischen Körpers; die Grenzen jenes Körpers heissen Flächen, die Grenzen der Flächen sind die Linien, die Grenzen der Linien endlich sind die Punkte. Der Körper besitzt, wie der Raum selbst, drei Dimensionen, die Fläche dagegen nur zwei derselben: Länge und Breite, während ihr die Dicke fehlt; die Linie hat nur eine einzige Dimension: die Länge; der Punkt endlich gar keine, er ist völlig ausdehnungslos und dient nur, um eine Stelle im Raume zu bezeichnen, ohne selbst irgend einen Teil des Raumes zu umfassen.

An die Erklärungen, welche wir soeben von den verschiedenen räumlichen Gestalten (Körper, Fläche, Linie, Punkt) ge-

geben haben, knüpft sich sogleich eine Folgerung, wenn man sich erinnert, dass die Grenze eines Gegenstandes nicht ein Teil desselben ist, sondern im Gegenteil angiebt, wo jener Gegenstand sein Ende findet; es folgt nämlich aus dieser Bemerkung, dass kein Teil eines Körpers eine Fläche, kein Teil einer Fläche eine Linie und kein Teil einer Linie ein Punkt sein kann, dass sich also auch umgekehrt aus Punkten keine Linie, aus Linien keine Fläche und aus Flächen kein Körper zusammensetzen lässt. Wohl aber kann durch stetige Bewegung eines Punktes eine Linie beschrieben oder konstruiert werden, indem man die Linie gewissermassen als die Spur ansieht, welche ein fortrückender Punkt hinter sich zurücklässt; ebenso entsteht durch stetige Bewegung der Linie eine Fläche und durch stetige Bewegung der Fläche ein Körper.

Die genannte Entstehungsweise der geometrischen Gestalten führt von selbst auf einige der wichtigsten Grundbegriffe der Geometrie. Soll nämlich ein Punkt sich stetig fortbewegen, um eine Linie zu beschreiben, so muss er die Stelle des Raumes, an welcher er sich befindet, verlassen und sich nach einer anderen Gegend des Raumes begeben, d. h. er muss in irgend einer Richtung weiter gehen. Hierbei können nun zwei Fälle eintreten; entweder nämlich behält der Punkt bei seiner Bewegung die einmal eingeschlagene Richtung fortwährend bei oder nicht, wodurch natürlich verschiedene Linien entstehen. Im ersten Falle nennt man die beschriebene Linie eine gerade Linie oder kurzweg Gerade, und kann daher sagen: die gerade Linie ist diejenige, welche durchaus nach einer und derselben Richtung verläuft; da ferner wegen der unendlichen Ausdehnung des Raumes jenem Verlaufe nirgends ein Hindernis entgegensteht, so kann jede Gerade als unbegrenzt gedacht werden. Wenn dagegen die Bewegung des stetig fortrückenden Punktes nicht in einer und derselben Richtung vor sich geht, so ist zu unterscheiden, ob die Linie ihre Richtung sprungweis, oder stetig, oder bald sprungweis und bald stetig ändert, und dann treten folgende Benennungen ein: eine Linie heisst eine gebrochene, wenn sie sprungweis ihre Richtung ändert, also aus Teilen besteht, welche für sich betrachtet, gerade sind; sie heisst eine krumme Linie,

wenn sie fortwährend ihre Richtung ändert, mithin kein Teil von ihr gerade ist; sie heisst endlich eine gemischte, wenn sie ihre Richtung bald sprungweis, bald stetig ändert, d. h. aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist.

Lässt man weiter die Gerade sich stetig fortbewegen, so entsteht eine Fläche, auf welcher sich stellenweis nach bestimmten Richtungen gerade Linien ziehen lassen; eine solche Fläche nennt man eine Regelfläche. Die wichtigste unter diesen Flächen ist die ebene Fläche oder Ebene; sie entsteht, wenn eine Gerade sich so bewegt, dass sie immer durch einen festen Punkt geht und zugleich an einer gegebenen Geraden hingleitet. Legt man durch irgend zwei Punkte einer solchen Fläche eine Gerade, so gilt von dieser der Grundsatz, dass sie ihrer ganzen Ausdehnung nach in die Ebene fällt; auf einer Ebene können daher nach allen Richtungen Gerade gezogen werden. Jede Fläche, welche diese Eigenschaft nicht besitzt, wird als eine krumme Fläche bezeichnet. Besteht die Fläche aus Teilen, welche, für sich betrachtet, Ebenen sind, so kann man sie eine gebrochene Fläche nennen; eine gemischte Fläche endlich wäre eine solche, die aus ebenen und krummen Flächen zusammengesetzt ist.

Nachdem wir uns mit den verschiedenen räumlichen Gestalten, welche den Gegenstand der Geometrie bilden, im allgemeinen bekannt gemacht haben, liegt es uns ob, genauer auf die Betrachtung der einzelnen Arten jener Gestalten einzugehen, um ihre etwaigen Eigenschaften zu erforschen. Dies gäbe eigentlich vier verschiedene Abteilungen: die Lehre von den Punkten, von den Linien, von den Flächen und von den Körpern. Nun bietet aber der Punkt so wenig Stoff zu einer wissenschaftlichen Untersuchung dar (wir haben in der That schon alles gesagt, was sich überhaupt von ihm sagen lässt), dass diese Abteilung sehr dürftig ausfallen würde, ausserdem setzt auch die Aufstellung mehrerer Punkte und ebenso die mehrerer Linien schon die verschiedenen Dimensionen des Raumes (also die Lehre von den Körpern) so notwendig voraus, dass man sich zu einer Abänderung jener Einteilung genötigt gesehen hat und die Geometrie in nur zwei Hauptteile zerspaltet. Der erste von

ihnen, die Geometrie der Ebene oder Planimetrie, beschäftigt sich mit denjenigen Raumgestalten, welche in einer Ebene Platz finden, der zweite dagegen, die Geometrie des Raumes oder Stereometrie, betrachtet solche räumliche Gestalten, welche alle drei Dimensionen des Raumes voraussetzen, also nicht in einer Ebene konstruiert werden können.

# Geometrie der Ebene.



# Die geradlinigen Gebilde.

---

## Kap. I.

## Die Entstehung der geradlinigen Gebilde.

### § 1.

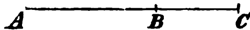
### Eine Gerade.

Die Eigenschaften der geraden Linie sind fast sämtlich so ursprüngliche und einfache, dass sich von denselben kein Beweis, sondern nur ein Nachweis geben lässt, indem man zeigt, wie unzertrennlich dieselben mit der Vorstellung der Geraden zusammenhängen.

*a)* Das einzige Merkmal, welches wir an einer unbegrenzten Geraden wahrnehmen, ist ihre Richtung. Gleichwohl reicht die Kenntnis dieser Richtung nicht hin, um die Gerade selbst so unzweifelhaft zu bestimmen, dass man sie von jeder anderen Geraden sogleich unterscheiden würde. Es kann nämlich mehrere Gerade geben, welche dieselbe Richtung besitzen, ohne deshalb mit jener völlig einerlei zu sein; man erhält in der That solche Gerade, wenn man von verschiedenen Punkten des Raumes aus jedesmal nach einer und derselben Richtung fortgeht. Ist dagegen ausser der Richtung der Geraden noch der Punkt bekannt, von welchem sie aus- oder durch welchen sie hindurchgeht, so kann kein Zweifel mehr über die Lage der Geraden sein, d. h.: E i n e  G e r a d e  i s t  i h r e r  L a g e  n a c h  b e s t i m m t, s o b a l d  e i n  P u n k t  i n  i h r  u n d  i h r e  R i c h t u n g  g e g e b e n  s i n d. Hieraus folgt unmittelbar, dass alle Geraden, welche nach einer und derselben Richtung durch einen und denselben Punkt gehen, völlig ineinander fallen oder, wie man zu sagen pflegt, sich decken.

*b)* Nehmen wir statt eines Punktes zwei Punkte *A* und *B* in einer geraden Linie an, so sondert sich aus der unbegrenzten Geraden ein begrenztes Stück, eine sogenannte Strecke, aus, die Gerade zwischen *A* und *B*, von welcher jene Punkte die Endpunkte sind.

Fig. 1.



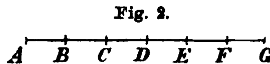

Über diese begrenzte Gerade gelten folgende Grundsätze, erstens: zwischen zwei gegebenen Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich (wohl aber beliebig viele krumme Linien), und zweitens: von allen Linien zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie die kürzeste. Man nennt daher auch die gerade Linie zwischen zwei Punkten den Abstand oder die Entfernung der beiden Punkte von einander und bezeichnet eine Gerade dadurch, dass man die an ihre Endpunkte gesetzten Buchstaben in der Rede wie in der Schrift unmittelbar aufeinander folgen lässt; die Gerade zwischen den Punkten *A* und *B* kann hiernach sowohl mit *AB* als mit *BA* bezeichnet werden. Denkt man sich dieselbe Gerade durch einen beweglichen Punkt beschrieben, so hat man zu unterscheiden, ob dieser Punkt von *A* nach *B* oder umgekehrt von *B* nach *A* fortgerückt ist; im ersten Falle schreibt man *AB*, im zweiten *BA*, man unterscheidet also, wenn es nötig ist, den sogen. Sinn, in welchem jene Strecke durchlaufen wird.

*c)* Von den beiden Merkmalen einer begrenzten geraden Linie (Richtung und Länge) ist jedes einer Veränderung fähig. Geht die Gerade, welche von einem gegebenen Punkte ausläuft, in eine andere Richtung über, ohne jedoch ihren Anfangspunkt zu verlassen, so sagt man, sie habe sich um ihren Anfangspunkt gedreht; Drehung ist demnach Veränderung der Richtung. Behält die gerade Linie bei dieser Bewegung auch noch ihre Länge bei, so beschreibt ihr Endpunkt eine Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass jeder ihrer Punkte von dem festen Anfangspunkte der Geraden gleich weit, und zwar um die Länge der unveränderlichen Geraden, entfernt liegt; die so entstehende Linie heisst ein Kreis, der feste Punkt: sein Mittelpunkt oder Centrum, und die unveränderliche Gerade: sein Halbmesser oder Radius.

*d)* Ändert zweitens die Gerade ihre Grösse, so tritt eine Verlängerung oder Verkürzung derselben ein; so kann die Ge-

rade $AB$ so weit verlängert werden, dass sie die neue Grösse $AC$ erhält, also um die Strecke $BC$ zugenommen hat. Man nennt dann $AC$ die Summe von $AB$ und $BC$, in Zeichen: $AC = AB + BC$, und umgekehrt $AB$ die Differenz zwischen $AC$ und $BC$, d. i. $AB = AC - BC$. Geschieht die Zunahme so, dass die Gerade um ihre eigene Grösse mehrmals nacheinander verlängert wird, so vervielfacht man die Gerade; wenn z. B. $AB = BC = CD$ u. s. w. ist, hat man $AC = 2AB$, $AD = 3AB$ u. s. f. Umgekehrt muss es auch möglich sein, eine gegebene Gerade in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zu teilen; denn gesetzt, der $n^{te}$ Teil einer gegebenen Geraden wäre nicht angebbar, so würde auch das Doppelte, Dreifache, Vierfache u. s. w. dieses $n^{ten}$ Teiles nicht anzugeben sein. Unter diesen aufeinander folgenden Vielfachen kommt aber auch das $n$fache jenes $n^{ten}$ Teiles vor und mithin wäre das $n$fache vom $n^{ten}$ Teil einer Geraden, d. h. die Gerade selber, nicht angebbar, was der Voraussetzung widerspricht, dass die Gerade gegeben vorliegt. — Fassen wir das Bisherige zusammen, so dürfen wir sagen: Es ist jederzeit möglich, Gerade von gegebenen Längen zu addieren, zu subtrahieren, zu vervielfachen und zu teilen.

Fig. 2.




## § 2.

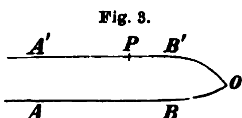
## Zwei Gerade.

Da sich an einer begrenzten Geraden die beiden Merkmale Richtung und Länge unterscheiden lassen, so kann man zwei Gerade auf doppelte Weise miteinander vergleichen, indem man entweder ihre Richtungen oder, im Fall beide begrenzt sind, ihre Längen ins Auge fasst. Hier soll nur die erste dieser Vergleichungen vorgenommen werden, die zweite dagegen überlassen wir dem späteren Kapitel von der Ausmessung geradliniger Gebilde. Hinsichtlich der Richtungen zweier Geraden sind nun zwei Fälle möglich; entweder nämlich haben beide Gerade eine und dieselbe Richtung, oder sie laufen nach verschiedenen Richtungen.

I. Zwei gerade Linien, welche gleiche Richtung besitzen, ohne ineinander zu fallen, wie z. B. $AB$ und $A'B'$, heissen

Parallelen, was durch $AB \parallel A'B'$ bezeichnet wird. Man bemerkt leicht, dass zwei solche Gerade immer nebeneinander herlaufen und niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge. Denn gesetzt, sie kämen in dem Punkte $O$ zusammen, so hätten wir zwei Gerade, welche durch einen und denselben Punkt $O$ gingen und zufolge der Voraussetzung einerlei Richtung besässen; dergleichen Gerade fallen aber nach § 1, *b)* völlig ineinander, und das widerspricht der Voraussetzung; mithin können die Geraden $AB$ und $A'B'$ nicht zugleich durch den Punkt $O$ gehen, d. h. **Parallelen treffen nie zusammen, wie weit man sie auch verlängern möge.**

Fig. 3.




Kennt man von zwei parallelen Geraden die eine, von der anderen aber nur einen Punkt, wäre also z. B. die Gerade $AB$ gegeben und ausser ihr der Punkt $P$, so ist die Lage der zweiten Parallele $A'B'$ vollkommen bestimmt; denn einerseits weiss man, dass sie durch einen gegebenen Punkt $P$ gehen soll, andererseits kennt man ihre Richtung, weil die letztere mit der Richtung der ersten Geraden $AB$ übereinstimmen soll, und folglich hat man nach § 1, *b)* den Satz: **Zu einer gegebenen Geraden lässt sich durch einen ausser ihr liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine Parallele ziehen.**

II. Weit mannigfaltiger ist der zweite Fall, wenn die beiden Geraden verschiedene Richtungen (in einer Ebene) besitzen. Hier stellen wir den Grundsatz auf: **Gerade von verschiedenen Richtungen in einer Ebene müssen, hinreichend verlängert, notwendig zusammentreffen; sie haben dann einen, aber auch nur einen, Punkt mit einander gemein.***

---

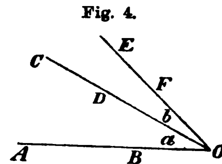
* In den beiden oben ausgesprochenen Sätzen:

1. Gerade von gleicher Richtung treffen nicht zusammen,
2. Gerade von verschiedenen Richtungen treffen immer zusammen,

ist angenommen, dass man die Gleichheit oder Ungleichheit der Richtungen von Hause aus *(a priori)* kenne, und man entscheidet daraus das Zusammentreffen oder Nichtzusammentreffen der Geraden. Ebenso leicht kann auch

Sind nun die Geraden wirklich soweit verlängert, dass sie in einem Punkte zusammentreffen, wie z. B. *AB* und *CD* in *O*, so entsteht an diesem Punkte ein neues geometrisches Gebild: der Winkel. Dieser zeigt an, um wieviel die Richtungen der Geraden *AB* und *CD* voneinander abweichen; ein Winkel bestimmt also den Unterschied zwischen den Richtungen zweier Geraden, welche in einem Punkte zusammentreffen oder von letzterem ausgehen. Die Geraden, von welchen der Winkel gebildet wird, heissen seine Schenkel, und der Punkt, in welchem sie zusammentreffen, der Scheitel oder die Spitze des Winkels. Bezeichnet wird ein Winkel entweder, wenn keine Verwechselung möglich ist, durch einen einzigen an seinen Scheitel gesetzten Buchstaben *O*, oder durch einen kleinen zwischen den Schenkeln angebrachten Buchstaben *a*, oder durch drei Buchstaben, von denen zwei an den Schenkeln und einer an dem Scheitel stehen; jedoch ist hierbei die Regel festzuhalten, dass der Scheitelbuchstabe jederzeit den mittelsten Platz erhalten muss, also *AOC* oder *COA*, oder *BOD* oder *DOB*. Statt des Wortes „Winkel“ pflegt man gewöhnlich das einfache Zeichen ∠ zu setzen.

Fig. 4.




Man kann sich die Entstehung des Winkels noch auf eine andere Weise denken, welche zwar von der vorigen nicht verschieden ist, aber die Einsicht in die Natur des Winkels erleichtert. Lassen wir nämlich eine Gerade *OA* sich um ihren Anfangspunkt *O* drehen bis sie in die Lage *OC* gelangt ist, so entsteht ebenfalls der Winkel *AOC*; man kann daher sagen: der

---

umgekehrt verfahren werden, indem man von dem Zusammentreffen oder Nichtzusammentreffen der Geraden auf die Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Richtungen zurückschliesst; nämlich:

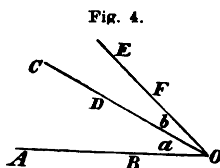
3. Zwei nicht zusammentreffende Gerade haben gleiche Richtung, denn wenn sie verschiedene Richtungen einschlügen, so müssten sie nach Nr. 2 zusammentreffen, was gegen die Voraussetzung ist;

4. Zwei zusammentreffende Gerade haben verschiedene Richtungen, denn hätten sie gleiche Richtungen, so träfen sie nach Nr. 1 nicht zusammen, was der Voraussetzung widerspricht.

Winkel $AOC$ ist bestimmt durch die Grösse der Drehung, welche erfordert wird, um die Gerade $OA$ in die Lage $OC$ zu bringen. Zu demselben Winkel würde man auch gelangt sein, wenn man umgekehrt von der Geraden $OC$ ausgegangen wäre und diese in die Lage von $OA$ zurückgedreht hätte; gleichwohl ist aber ein kleiner Unterschied zwischen diesen beiden Drehungen; beide haben zwar dieselbe Grösse, aber im ersten Falle geht die Drehung rechts herum, in zweiten Falle links herum; man muss daher bei einer Drehung ausser der Grösse noch den sogen. Sinn unterscheiden, in welchem die Drehung vor sich gegangen ist. Im ersten Falle bezeichnet man den Winkel $a$ mit $\angle AOC$, im zweiten mit $\angle COA$.

Es ist nun leicht einzusehen, dass zwei Winkel, welche durch gleich grosse Drehungen in demselben Sinne entstanden sind, völlig gleich sein müssen, wie denn überhaupt zwei Objekte, die in allen ihren Merkmalen übereinstimmen, gar nicht voneinander unterschieden werden können. Dagegen ist ein Winkel grösser als der andere, wenn er durch eine grössere Drehung in demselben Sinne hervorgebracht wurde.

Fig. 4.

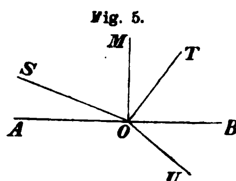



Denken wir uns z. B. die Gerade $OA$ gedreht, bis sie in die Richtung $OC$ kommt, und darauf die Drehung in derselben Richtung fortgesetzt bis zur Lage $OE$, so ist der Winkel $AOE$ grösser, und zwar um den Winkel $COE$ grösser, als der ursprüngliche Winkel $AOC$; wir nennen dann den Winkel $AOE$ die Summe der Winkel $AOC$ und $COE$, in Zeichen: $\angle AOE = \angle AOC + \angle COE$, und umgekehrt den Winkel $AOC$ die Differenz zwischen den Winkeln $AOE$ und $COE$, d. h. $\angle AOC = \angle AOE - \angle COE$. Lässt man in demselben Sinne mehrere Drehungen aufeinander folgen, welche sämtlich von gleicher Grösse sind, so entstehen der Reihe nach Winkel, welche das Doppelte, Dreifache, Vierfache u. s. w. des ursprünglichen Winkels ausmachen, und man kann daher einen Winkel beliebig vervielfachen. Umgekehrt wird man sich durch ganz ähnliche Schlüsse wie in § 1, $c$) sehr leicht überzeugen, dass es jederzeit möglich ist, einen gegebenen Winkel in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zu teilen. Nach diesen Er-

örterungen dürfen wir sagen: **Es ist jederzeit möglich, gegebene Winkel zu addieren, zu subtrahieren, zu vervielfachen und zu teilen.**

*a)* Arten der Winkel. Denkt man sich die Drehung der Geraden $OA$ soweit fortgesetzt, bis sie in die der ursprünglichen Lage gerade entgegengesetzte Lage $OB$ kommt, so entsteht derjenige Winkel, welchen man den gestreckten Winkel nennt, und man kann daher die Erklärung aufstellen: der gestreckte Winkel ist derjenige, dessen Schenkel in einer geraden Linie einander entgegengesetzt liegen. Da der gestreckte Winkel zu seiner Entstehung nicht eine beliebige, sondern eine ganz bestimmte Drehung erfordert, welche sich stets gleich bleibt (es ist immer die Drehung aus einer Lage in die entgegengesetzte), so folgt auf der Stelle, dass der gestreckte Winkel der einzige seiner Art ist, dass mithin alle gestreckten Winkel einander gleich sind. Die Hälfte des gestreckten Winkels, nämlich $\angle AOM$, heisst der rechte Winkel, welcher ebenfalls der einzige seiner Art ist. Beträgt ein Winkel weniger als ein rechter, so wird er ein spitzer genannt, z. B. $\angle AOS$, ein stumpfer Winkel dagegen ist ein solcher, welcher mehr als ein rechter ausmacht, z. B. $\angle AOT$. Man hat diese Einteilung noch etwas weiter getrieben, indem man alle Winkel, welche kleiner als der gestreckte Winkel sind, unter der Benennung hohle oder konkave Winkel zusammenfasste und dagegen alle Winkel, welche mehr als ein gestreckter Winkel betragen, erhabene oder konvexe Winkel nannte. Der spitze, rechte und stumpfe Winkel gehören demnach zu den konkaven Winkeln; konvex aber wäre z. B. der Winkel $AOU$, wenn man ihn dadurch entstanden denkt, dass sich die Gerade $OA$ aus ihrer ursprünglichen Lage rechts herum bis zur Lage $OU$ gedreht hat. Als Mass der Winkel benutzt man häufig den rechten Winkel und bezeichnet ihn einfach mit $R$; man sagt dann auch nicht „gestreckter Winkel“, sondern statt dessen „zwei rechte Winkel“, in Zeichen: $2R$. Dementsprechend müssen spitze Winkel in Bruchteilen des rechten Winkels ausgedrückt werden, z. B. $\frac{1}{2}R$, $\frac{5}{8}R$, $\frac{2}{3}R$ u. s. w.

Fig. 5.

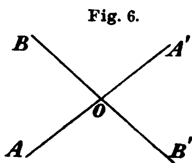


Wegen der Unbequemlichkeit, welche namentlich bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division spitzer Winkel durch diese Ausdrucksweise entsteht, nimmt man in solchen Fällen einen Teil des Winkels zur Masseinheit; dabei denkt man sich herkömmlicher Weise den rechten Winkel in 90 gleiche Teile geteilt und nennt einen solchen Teil einen Winkelgrad; der 60ste Teil eines Grades heisst eine Winkelminute, der 60ste Teil einer Minute eine Winkelsekunde, die man nötigenfalls in Zehntel, Hundertel u. s. f. weiter teilt. Für den Grad dient das Zeichen $^0$, für Minute $'$, für Sekunde $''$, wonach z. B. $18^0\,5'\,37''9$ soviel bedeutet wie 18 Grad, 5 Minuten, $37\frac{9}{10}$ Sekunden. Demzufolge ist

$$\tfrac{1}{2}R = 45^0,\quad \tfrac{5}{8}R = 11^0\,15',\quad \tfrac{17}{64}R = 23^0\,54'\,22''5,$$
$$2R = 180^0,\quad 3R = 270^0,\quad 4R = 360^0.$$

*b)* Nebenwinkel. Wir haben bisher die nach verschiedenen Richtungen laufenden Geraden nur soweit verlängert, dass sie eben zusammentrafen; um aber die Untersuchung über zwei derartige Gerade vollständig zu erledigen, müssen wir die Geraden (die Winkelschenkel) noch über jenen Punkt hinaus fortsetzen. Verlängern wir nun vorerst den einen Winkelschenkel $AO$ über $O$ hinaus, so entsteht ein zweiter Winkel $A'OB$, welcher der Nebenwinkel von $AOB$ heisst; umgekehrt nennt man auch den Winkel $AOB$ den Nebenwinkel von $A'OB$. Es kommen demnach die Nebenwinkel immer paarweis vor und sind daran kenntlich, dass sie einen Schenkel und den Scheitel gemeinschaftlich haben, während die anderen Schenkel in gerader Linie liegen. Berücksichtigt man, dass der Winkel $AOA'$ ein gestreckter, also $= 2R$ ist, so folgt nach dem, was über die Addition der Winkel gesagt worden ist, sogleich der Satz: Nebenwinkel betragen zusammengenommen immer zwei Rechte. Da alle gestreckten Winkel einander gleich sind, so knüpft sich daran noch die Folgerung: Irgend ein Paar Nebenwinkel beträgt zusammen ebensoviel als irgend ein anderes Paar Nebenwinkel.

Fig. 6.




Man kann den vorigen Satz auch umkehren; betragen nämlich irgend zwei Winkel zusammen einen gestreckten Winkel,

und legt man sie so aneinander, dass sie den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, so müssen die Winkel zu Nebenwinkeln werden und die anderen Schenkel in einer geraden Linie liegen. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste der gestreckte Winkel (und soviel machen beide Winkel der Voraussetzung nach zusammen aus) auch so beschaffen sein können, dass seine Schenkel nicht in gerader Linie lägen, was aber der Definition des gestreckten Winkels und der Bemerkung widerspricht, dass alle gestreckten Winkel gleich sind.

*c)* Scheitelwinkel. Verlängern wir ausser dem ersten Winkelschenkel $AO$ auch den zweiten $BO$ über $O$ hinaus, so entstehen noch zwei Winkel, unter denen derjenige, welcher von den Verlängerungen $A'O$ und $B'O$ der Schenkel des ursprünglichen Winkels gebildet ist, der Scheitelwinkel desselben genannt wird; ebenso heisst auch $\angle AOB$ der Scheitelwinkel von $\angle A'OB'$, so dass also Scheitelwinkel nur paarweis vorkommen. Nach dem zweiten in *b)* erwiesenen Satze ist nun

$$\angle AOB + \angle BOA' = \angle BOA' + \angle A'OB',$$

weil die links und rechts stehenden Winkel Nebenwinkel sind. Nimmt man beiderseits den sich selbst-gleichen Winkel $BOA$ weg, so bleibt

$$\angle AOB = \angle A'OB',$$

d. h. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Auch hier kann eine Umkehrung des Satzes eintreten und man wird sich durch sehr einfache Schlüsse ähnlich wie in *b)* überzeugen, dass zwei gleiche Winkel jederzeit als Scheitelwinkel betrachtet und in der That so aneinander gelegt werden können, dass der eine von den Schenkelverlängerungen des anderen gebildet wird.

## § 3.

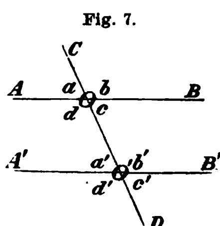
## Drei Gerade.

Vergleichen wir die Richtungen dreier in einer Ebene liegenden Geraden, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden; entweder nämlich haben alle drei Gerade eine und dieselbe Richtung, oder zwei von ihnen laufen nach derselben Richtung,

während die dritte Gerade eine andere Richtung einschlägt, oder endlich, jede der drei Geraden hat eine verschiedene Richtung. Von diesen drei Fällen bedarf der erste keiner weiteren Erörterung, denn es lässt sich von drei parallelen Geraden nur wiederholen, was schon über zwei Parallelen gesagt ist; wir wenden uns daher sogleich zum zweiten Falle.

I. Die Parallelentheorie. Haben die Geraden $AB$ und $A'B'$ gleiche Richtung, laufen sie also parallel, und ist ausserdem die Gerade $CD$ in einer von $AB$ verschiedenen Richtung gezogen, so schneidet nach dem in § 2, II ausgesprochenen Grundsatze die Gerade $CD$ jede der Geraden $AB$ und $A'B'$, und es entstehen an den Durchschnittspunkten $O$ und $O'$ im ganzen acht Winkel: $a, b, c, d, a', b', c', d'$. Diese pflegt man auf verschiedene Art paarweis zusammenzustellen; man nennt nämlich korrespondierende Winkel diejenigen, welche auf denselben Seiten von $AB$ und $A'B'$ und zugleich auf derselben Seite von $CD$ liegen (so liegt z. B. $a$ oberhalb $AB$, ebenso $a'$ oberhalb $A'B'$, und zugleich liegen $a$ und $a'$ links von $CD$), und es sind daher die korrespondierenden Winkel:

Fig. 7.




$a$ und $a'$
$b$ „ $b'$
$c$ „ $c'$
$d$ „ $d'$;

lässt man ferner an die Stelle des einen von zwei korrespondierenden Winkeln seinen Scheitelwinkel treten (wechselt also), so entstehen die Wechselwinkel, nämlich:

$a$ und $c'$
$b$ „ $d'$
$c$ „ $a'$
$d$ „ $b'$,

von denen man das erste und zweite Paar unter den Namen äussere Wechselwinkel, sowie das dritte und vierte unter den Namen innere Wechselwinkel zusammenfasst; setzt man endlich an die Stelle eines zweier korrespondierenden Winkel seinen

an derselben Seite von $CD$ liegenden Nebenwinkel, so erhält man äussere und innere Winkel an derselben Seite, nämlich:

$a$ und $d'$
$b$ „ $c'$
$c$ „ $b'$
$d$ „ $a'$.

Die Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln stattfinden, lassen sich auf folgendem Wege leicht entdecken. Da nach der Voraussetzung $AB$ und $A'B'$ gleiche Richtung besitzen, so ist auch

die Richtung von $OA$ = der Richtung von $O'A'$;

da ferner $OC$ und $O'C$ Teile einer und derselben Geraden sind, so muss

die Richtung von $OC$ = der Richtung von $O'C$

sein; mittelst des Grundsatzes, dass Gleiches mit Gleichem verglichen Gleiches liefert, folgt hieraus, dass der Unterschied zwischen den Richtungen von $OA$ und $OC$ gleich ist dem Unterschiede zwischen den Richtungen von $O'A'$ und $O'C$. Die erste Richtungsdifferenz wird durch den Winkel $AOC$ angezeigt, die zweite durch den Winkel $A'O'C$, und da beide Richtungsunterschiede gleich sind, so muss auch $\angle AOC = \angle A'O'C$ oder kürzer $a = a'$ sein. Ebenso leicht kann man zu den Gleichungen $b = b'$, $c = c'$ und $d = d'$ gelangen; man ist hiernach berechtigt, den Satz auszusprechen: Die korrespondierenden Winkel sind einander gleich.

Da $a = a'$ und nach dem Satze von den Scheitelwinkeln $a' = c'$ ist, so folgt $a = c'$ und auf ganz ähnlichem Wege auch $b = d'$, $c = a'$ und $d = b'$, d. h.: Wechselwinkel sind einander gleich.

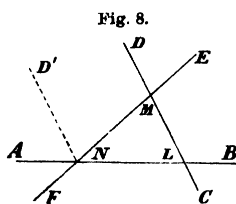
Berücksichtigen wir endlich, dass $a + b = 2R$ und $b = b'$ ist, so folgt $a + b' = 2R$; setzt man dagegen in der Gleichung $a + b = 2R$ für $a$ den ihm gleichen Winkel $a'$, so folgt ähnlich $a' + b = 2R$; d. h.: Äussere Winkel an derselben Seite und ebenso innere Winkel an derselben Seite betragen zusammen zwei Rechte.

Es ist übrigens leicht, alle diese Sätze umzukehren und z. B. aus der Gleichheit der korrespondierenden oder Wechsel-

winkel den Parallelismus der beiden Geraden zu erschliessen. Ist im ersten Falle $a = a'$, so weichen die Richtungen der Geraden $OA$ und $O'A'$ von der Richtung der Geraden $CD$ um gleichviel (um die gleichen Richtungsunterschiede $a$ und $a'$) ab, woraus sogleich folgt, dass die Richtungen von $OA$ und $O'A'$ einander gleich, mithin $AB$ und $A'B'$ einander parallel sind. — Setzt man die Gleichheit der Wechselwinkel $a$ und $c'$ voraus, so folgt wegen $c' = a'$ zunächst $a = a'$ und nach dem Vorigen wieder, dass $AB$ und $A'B'$ einander parallel laufen. — Hat man endlich $a' + b = 2R$, so ist wegen $a + b = 2R$ notwendig auch $a' = a$, woraus wieder der Parallelismus von $AB$ und $A'B'$ folgt. Betragen dagegen die inneren Winkel zusammen mehr oder weniger als zwei Rechte, so beträgt auch $a$ mehr oder weniger als $a'$; daraus ergiebt sich weiter, dass $AB$ und $A'B'$ ungleiche Richtungen haben und sich folglich nach § 2, II schneiden müssen.

II. Das Dreieck. Wenn von drei Geraden jede eine andere Richtung verfolgt, so schneidet nach § 2, II die erste Gerade die zweite, die zweite die dritte und die dritte die erste; es entstehen also drei Durchschnitte wie $L$, $M$, $N$, und zugleich bildet sich eine nach allen Seiten geschlossene Figur: das Dreieck. Die drei Durchschnittspunkte $L$, $M$, $N$ heissen die Ecken oder Spitzen desselben, die zwischen denselben liegenden Teile der Geraden, also die Strecken $LM$, $MN$, $NL$ heissen die Seiten des Dreiecks, und die Winkel $MLN$, $LMN$, $MNL$ die Winkel desselben.

Fig. 8.




Ohne uns vor der Hand auf eine tiefere Untersuchung des Dreiecks einzulassen, wollen wir nur diejenigen zwei Eigenschaften desselben hervorheben, welche sich unmittelbar ergeben, wenn man einmal die Seiten und das andere Mal die Winkel des Dreiecks ins Auge fasst. — Irgend zwei Ecken des Dreiecks, z. B. $L$ und $M$, kann man sich auf doppelte Weise verbunden denken, einmal durch die Gerade $LM$ und dann durch die gebrochene Linie über $N$, welche aus den beiden Seiten $LN$ und $NM$ besteht. Da nun die gerade Linie zwischen zwei Punkten der kürzeste Weg ist, so folgt der Satz: Zwei Seiten

eines Dreiecks betragen zusammengenommen mehr als die dritte Seite. Man schliesst daraus noch den Zusatz: Die Differenz zweier Dreieckseiten beträgt weniger als die dritte Seite.

Denkt man sich durch eine Ecke, etwa $N$, eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite $LM$ gezogen, so finden folgende Beziehungen statt, in welchen die Winkel des Dreiecks kurz mit $L$, $M$, $N$ bezeichnet sind:

$\angle L = \angle AND'$ als korrespondierende Winkel,
$\angle M = \angle D'NM$ als Wechselwinkel.

Durch Addition derselben folgt die Gleichung:

$$\angle L + \angle M = \angle ANM,$$

welche sich leicht in Worte übersetzen lässt, wenn man den Winkel $ANM$, welcher durch Verlängerung einer Dreieckseite ($LN$) entsteht, einen Aussenwinkel des Dreiecks nennt; jene Gleichung sagt dann: Zwei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen soviel als der Aussenwinkel an der dritten Ecke.

Addiert man zu der eben in Worten ausgedrückten Gleichung beiderseits den Winkel $N$, so folgt $\angle L + \angle M + \angle N = \angle ANM + \angle N$, d. i. $= 2R$, weil die Winkel $ANM$ und $N$ Nebenwinkel sind. Dies giebt den Satz: Die sämtlichen Winkel eines Dreiecks betragen zusammengenommen zwei Rechte.

Sind also zwei Winkel, etwa $L$ und $M$, von einem Dreiecke gegeben, so findet man sogleich den dritten, nämlich $N = 2R - (L + M)$.

Die Arten der Dreiecke. Man kann die Dreiecke nach zwei Gesichtspunkten einteilen, indem man entweder von den Seiten oder von den Winkeln ausgeht. Im ersten Falle ist es die Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten, worauf man achtet, und es heisst dann ein Dreieck gleichseitig, wenn es drei gleiche Seiten hat, gleichschenklig, wenn es zwei gleiche Seiten hat, und ungleichseitig, wenn es lauter ungleiche Seiten besitzt. Sehr oft nennt man eine von den Seiten des Dreiecks die Grundlinie oder Basis und die anderen Schenkel; namentlich im gleichschenkligen Dreieck gilt die letztere Be-

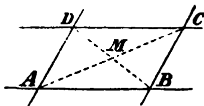
zeichnung für die beiden gleichen Seiten, die erstere für die dritte ungleiche Seite. — Sieht man dagegen auf die Winkel des Dreiecks, so ist zu unterscheiden, ob dasselbe nur spitze Winkel enthält, oder einen rechten und zwei spitze Winkel, oder einen stumpfen und zwei spitze Winkel. Im ersten Falle heisst das Dreieck ein spitzwinkliges, im zweiten ein rechtwinkliges und im dritten ein stumpfwinkliges. Im rechtwinkligen Dreiecke insbesondere führen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten den Namen Katheten, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite wird die Hypotenuse genannt.

## § 4.

## Vier und mehrere Gerade.

I. Vollkommen entsprechend der im vorigen Paragraphen durchgeführten Untersuchung lässt sich das behandeln, was von vier oder mehreren Geraden in einer Ebene gesagt werden kann. Es müssen nämlich bei vier Geraden auch vier Fälle unterschieden werden, ob nämlich nur eine und dieselbe Richtung vorhanden ist, oder ob die Geraden nach zwei oder drei oder vier verschiedenen Richtungen verteilt sind. Der erste Fall bedarf keiner weiteren Untersuchung, denn über vier einander parallel laufende Gerade lässt sich nicht mehr als über zwei dergleichen sagen. Sind zweitens die Geraden nach zwei Richtungen verteilt, so gehen entweder drei nach der einen Richtung und eine nach der andern Richtung, oder zwei Gerade folgen der einen und zwei der andern Richtung; das Erste gäbe drei Parallelen, durchschnitten von einer Geraden, und würde nur eine Wiederholung der Parallelentheorie sein; das Zweite dagegen ist etwas Neues; es entsteht nämlich durch vier solche Gerade ein Viereck, in welchem jede zwei einander gegenüberliegenden Seiten einander parallel laufen, d. i. ein sogenanntes Parallelogramm. Wendet man die Sätze der Parallelentheorie auf die vier Geraden an, so findet man ohne Mühe, dass die an einer Seite liegenden Winkel eines Parallelogrammes, z. B. $\angle BAD$ und $\angle ABC$, zusammen zwei Rechte ausmachen und dass ferner die gegenüber-

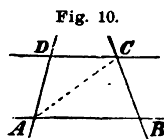
Fig. 9.



liegenden Winkel, z. B. $\angle BAD$ und $\angle BCD$, einander gleich sind. Hieraus folgt u. a. weiter, dass, wenn ein Winkel des Parallelogrammes ein Rechter ist, sämtliche Winkel ebenfalls Rechte sein müssen; ein derartiges Parallelogramm heisst ein Rechteck, und wenn ausserdem zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten gleich sind, ein Quadrat.

Sind drittens vier Gerade nach drei Richtungen verteilt, so müssen zwei Gerade gleiche Richtung halten, und es entsteht in diesem Falle ein Viereck, worin nur zwei gegenüberliegende Seiten ($AB$ und $CD$) einander parallel sind; dasselbe heisst ein Trapez; die grössere der parallelen Seiten pflegt man wohl auch seine Basis zu nennen.

Fig. 10.




Wenn endlich von vier Geraden jede eine andere Richtung einschlägt, so entsteht ein unregelmässiges Viereck. Sind die Seiten desselben gleich, so heisst es ein Rhombus, ausserdem aber hat man keine besonderen Benennungen weiter eingeführt.

Als allgemeine Eigenschaften des Vierecks erwähnen wir noch folgende: je drei Seiten eines Vierecks betragen zusammengenommen mehr als die vierte Seite, ferner: ausser den vier Seiten des Vierecks giebt es noch zwei gerade Linien, welche ebenfalls zur gegenseitigen Verbindung der Ecken dienen; diese Geraden entstehen nämlich, wenn man die gegenüberliegenden Ecken des Vierecks miteinander verbindet, und sie heissen Diagonalen. Jede Diagonale teilt das Viereck in zwei Dreiecke; hieraus folgt noch, dass die Summe aller Winkel eines Vierecks vier Rechte beträgt, weil sie aus den Winkelsummen jener zwei Dreiecke zusammengesetzt ist.

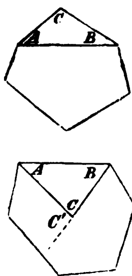
II. Wie man auf dem bisherigen Wege weiter gehen könnte, bedarf wohl keiner Auseinandersetzung; es ist aber leicht zu sehen, dass die Ergebnisse eines solchen weiteren Fortschritts zur einen Hälfte nur in einer langen Reihe von Definitionen bestehen würden, welche man für die einzelnen Fälle (ähnlich wie beim Viereck) aufstellen könnte. Da diese ebensowenig ein theoretisches Interesse als praktische Wichtigkeit besitzen, so übergehen wir dieselben und entwickeln nur noch einige allgemeine Eigenschaften, welche jedem ebenen Vielecke zukommen. Diese Eigenschaften betreffen erstens die Anzahl derjenigen Ge-

raden, welche je zwei nichtbenachbarte Ecken des Vielecks verbinden, d. h. die Anzahl der Diagonalen, und zweitens die Summe aller Winkel des Vielecks.

Stellen wir uns an die eine Ecke eines Vielecks von $n$ Ecken ($n$-Ecks), so können wir von hier aus gerade Linien nach den übrigen $n-1$ Ecken, also $n-1$ Gerade ziehen; zwei von diesen Geraden sind Seiten des Vielecks (nämlich diejenigen Geraden, welche nach den beiden Nachbarpunkten gezogen wurden) und mithin bleiben $n-3$ Gerade übrig, welche Ecken des Vielecks verbinden, ohne Seiten zu sein, d. h. man kann von einer Ecke aus $n-3$ Diagonalen ziehen. Dasselbe lässt sich von jeder Ecke sagen und mithin wäre die Anzahl der Diagonalen $= n(n-3)$; dabei ist aber jede Diagonale zweimal gerechnet, nämlich an jedem ihrer Endpunkte als eine besondere gezählt worden; wir müssen daher, um die wahre Diagonalenzahl zu erhalten, noch durch 2 dividieren. Die Anzahl der Diagonalen eines Vieleckes von $n$ Seiten ist demnach $= \frac{1}{2} n (n-3)$.

Um ferner die Summe der Winkel eines Vielecks zu bestimmen, beantworten wir erst die Frage, um wieviel die Winkelsumme eines Vielecks zunimmt, wenn dessen Seitenzahl um Eins wächst. Ist nun $AB$ irgend eine Seite eines Vielecks und denkt man sich über $AB$ ein Dreieck konstruiert, dessen Seiten $AC$ und $BC$ nicht in die Verlängerungen der anstossenden Vieleckseiten fallen, so hat das Vieleck um eine Seite zugenommen, indem $AC$ und $BC$ an die Stelle von $AB$ getreten sind. Das hinzugesetzte Dreieck kann nun sowohl ausserhalb als innerhalb des Vielecks zu liegen kommen, und darnach muss man die Frage trennen. Im ersten Falle nimmt die Winkelsumme des Vielecks um die drei Winkel $A$, $B$ und $C$, d. h. um zwei Rechte zu; im zweiten Falle vermindert sich, wie man aus der Figur sieht, die Winkelsumme um $A$ und $B$, wächst aber gleichzeitig um den konvexen Winkel bei $C$, welcher $= 2R + C' = 2R + A + B$ ist, sie wächst also zusammen doch wieder um $2R$, so dass nun in jedem Falle die Winkelsumme um $2R$ zunimmt, sobald die Seitenzahl des Vielecks um eine Einheit vermehrt

Fig. 11.



wird. Da im Dreieck die Winkelsumme $= 2R$ ist, so folgt hieraus, dass die Winkelsumme im

$$4\text{Eck} = 4R = 2 \,.\, 2R$$
$$5\text{Eck} = 6R = 3 \,.\, 2R$$
$$6\text{Eck} = 8R = 4 \,.\, 2R$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ist u. s. w., und man findet hieraus leicht das allgemeine Gesetz: Die Winkelsumme eines Vielecks von $n$ Seiten beträgt $(n - 2)\, 2R = (2n - 4)\, R$.

Hieran knüpft sich noch die Konsequenz, dass jedes Vieleck wenigstens drei konkave Winkel besitzen muss. Denn hätte das $n$-Eck nur 2 konkave Winkel, so besässe es $n - 2$ konvexe Winkel, und da ein konvexer Winkel mehr als $2R$ beträgt, so betrügen diese konvexen Winkel zusammen allein schon mehr als $(n - 2)\, 2R$, d. h. mehr als die Winkelsumme des Vielecks, was natürlich nicht möglich ist.

---

# Kap. II.

# Der Zusammenhang unter den Bestandteilen geradliniger Figuren.

---

## § 5.

## Allgemeine Erörterungen.

Wenn von irgend einem Objekte sämtliche Bestandteile gegeben sind und zugleich die Ordnung vorgeschrieben ist, in welcher diese Bestandteile aufeinander folgen sollen, so kann offenbar kein Zweifel über die Beschaffenheit des Gegenstandes selbst stattfinden, und setzt man in der That die gegebenen Bestandteile in der vorgeschriebenen Ordnung zusammen, so wird man jedesmal dasselbe Objekt erhalten; man sagt daher: Irgend ein Gegenstand ist seiner Natur nach bestimmt, sobald seine sämtlichen Bestandteile und deren An-

ordnung bekannt sind. Hieraus folgt, dass ein Vieleck vollkommen bestimmt sein muss, sobald die Seiten und Winkel desselben der Reihe nach gegeben sind, denn diese bilden eben die Bestandteile des Vielecks. Zugleich erhellt, dass zwei Vielecke, welche in allen diesen Bestandteilen, in derselben Reihenfolge genommen, miteinander übereinstimmen, nur als Wiederholungen oder Kopien voneinander gelten können und dass sie, mit den gleichen Seiten und Winkeln aufeinander gelegt, zu einem einzigen Vielecke zusammenfallen müssen. Derartige Vielecke nennt man einander kongruent und bezeichnet ihre Kongruenz mit dem Zeichen $\cong$.

Diese Lehre würde sehr kurz ausfallen und sich auf das Gesagte beschränken müssen, wenn nicht bei den Bestandteilen geometrischer Figuren eine Eigentümlichkeit stattfände, die man sonst nirgends antrifft. Während z. B. die Bestandteile naturwissenschaftlicher Gegenstände in keiner gegenseitigen Abhängigkeit voneinander stehen (aus der Form der Blätter z. E. folgt noch gar nichts über die Form oder Farbe der Blüten), findet zwischen den Bestandteilen geometrischer Figuren ein derartiger Zusammenhang statt, dass man aus einigen jener Bestandteile die übrigen finden kann und mithin nicht alle Bestandteile eines Vielecks zur Bestimmung desselben erforderlich sind. Bleiben wir z. B. bei dem Dreiecke stehen und denken uns dasselbe dadurch gebildet, dass drei nicht in einer Geraden liegende Punkte durch gerade Linien miteinander verbunden worden sind, so sehen wir die Winkel des Dreiecks mit den Seiten gleichzeitig entstehen und finden schon hierin eine Hindeutung auf einen gegenseitigen Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks. Diese gegenseitige Abhängigkeit der Bestandteile der Vielecke zu untersuchen, ist nun der Zweck dieses Kapitels, und wir fangen die Untersuchung natürlich mit der einfachsten Figur, dem Dreiecke an.

## § 6.

## Unvollständig bestimmte Dreiecke.

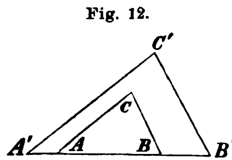
Der vorigen allgemeinen Erörterung zufolge haben wir die Frage zu beantworten, wie viele Bestandteile eines Dreiecks

gegeben sein müssen, wenn durch dieselben das Dreieck bestimmt sein soll. Zu diesem Zwecke betrachten wir vorerst die sehr einfachen Fälle, wo von dem Dreiecke nur ein oder zwei Bestandteile gegeben sind. Kennt man einen Bestandteil des Dreiecks, so ist dies entweder ein Winkel oder eine Seite. Im ersten Falle steht es frei, auf jedem Winkelschenkel einen Punkt willkürlich zu wählen und durch geradlinige Verbindung dieser Punkte ein Dreieck herzustellen, welches den gegebenen Winkel enthält; man sieht augenblicklich, dass sich auf diese Weise unendlich viel verschiedene Dreiecke mit demselben gegebenen Winkel bilden lassen, dass also durch einen Winkel allein das Dreieck nicht bestimmt wird. Ist zweitens nur eine Seite des Dreiecks gegeben, so kann man die Endpunkte derselben mit irgend einem ausser ihr willkürlich gewählten Punkte geradlinig verbinden und auf diese Weise ein Dreieck konstruieren, welches die gegebene Seite enthält; auch hier zeigt sich, dass unendlich viel verschiedene Dreiecke dieser Art möglich sind, dass also durch eine Seite allein das Dreieck nicht bestimmt wird.

Bei zwei gegebenen Bestandteilen sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem zwei Winkel, oder eine Seite und ein Winkel, oder zwei Seiten als bekannt vorausgesetzt werden.

*a)* Sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben, so kennt man nach § 3, II. auch den dritten Winkel, und um nun ein Dreieck herzustellen, welches diese Winkel enthält, braucht man nur zwei der gegebenen Winkel, etwa $A$ und $B$, an eine willkürlich gewählte Basis $AB$ anzutragen und die beiden übrigen Schenkel $AC$ und $BC$ bis zu ihrem Durchschnitte $C$ zu verlängern. Zufolge der beliebigen Wahl von $AB$ können unendlich viel verschiedene Dreiecke dieser Art konstruiert werden; so ist z. B. in der Figur $A'C' \parallel AC$, $B'C' \parallel BC$, daher $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$ und $\angle C' = \angle C$, aber das Dreieck $A'B'C'$ ist verschieden vom Dreieck $ABC$. Zwei Winkel bestimmen demnach das Dreieck nicht.

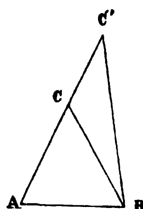
Fig. 12.




*b)* Es seien ferner eine Seite $AB$ und ein anliegender Winkel, etwa $A$, gegeben; man denke sich dann auf dem einen

Schenkel dieses Winkels die vorgeschriebene Strecke $AB$, auf dem andern Schenkel die beliebige Strecke $AC$ abgeschnitten und die Gerade $BC$ gezogen, so hat man ein Dreieck $ABC$ mit den gegebenen Bestandteilen. Wegen der Willkürlichkeit von $AC$ sind solcher Dreiecke unendlich viele verschiedene möglich, und daher ist auch hier das Dreieck nicht bestimmt.

Fig. 13.




Werden zwei derartige Dreiecke $ABC$ und $ABC'$ mit den willkürlichen Seiten $AC$ und $AC'$ konstruiert, indem man $AC' > AC$ nimmt, so gilt auch für die Gegenwinkel $ABC$ und $ABC'$ die Beziehung $\angle ABC > \angle ABC'$; d. h.: Das Dreieck mit der grösseren willkürlichen Seite hat auch den grösseren Gegenwinkel.

Wenn ausser der Seite $AB$ der gegenüberliegende Winkel $C$ gegeben ist, so kennt man die Summe der anliegenden Winkel, nämlich $A + B = 2R - C$. Einen derselben kann man willkürlich (nur kleiner als $2R - C$) wählen; die vorige Gleichung giebt dann den andern, und wenn man jetzt beide Winkel an $AB$ anträgt, so erhält man ein Dreieck mit den vorgeschriebenen Bestandteilen. Zufolge der willkürlichen Wahl des einen der beiden Winkel $A$ und $B$ ist auch hier das Dreieck nicht bestimmt.

*c)* Wir setzen endlich voraus, dass zwei Seiten, etwa $AB$ und $AC$, gegeben seien. Legt man dieselben so aneinander, dass sie einen beliebigen Winkel $BAC$ einschliessen, und verbindet die Endpunkte $B$ und $C$ durch eine Gerade, so kann man beliebig viel verschiedene Dreiecke mit denselben zwei Seiten $AB$ und $AC$ bilden; durch zwei Seiten ist also das Dreieck nicht bestimmt.

Um zu erfahren, wie die dritte Seite $BC$ sich ändert, wenn der Winkel $BAC$ eine Änderung erleidet, betrachten wir zwei

Fig. 14 α.

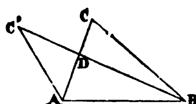



Fig. 14 β.

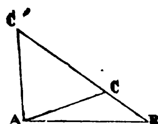
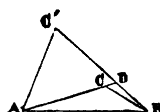



Fig. 14 γ.




Dreiecke $ABC$ und $ABC'$, welche in den Seiten $AB$ und $AC = AC'$ übereinstimmen, während $\angle BAC' > \angle BAC$ ist.

Hierbei kann $C$ drei verschiedene Lagen in Beziehung auf das Dreieck $ABC'$ einnehmen; es fällt nämlich $C$ entweder ausserhalb des Dreiecks $ABC'$ oder auf die Seite $BC'$ oder in das Dreieck $ABC'$. Nennen wir immer $D$ den Durchschnitt von $BC'$ mit der nötigenfalls verlängerten $AC$, so ist bei der ersten Lage

im Dreieck $AC'D$: $AD + C'D > AC'$,
im Dreieck $BCD$ : $CD + BD > BC$,

mithin zusammen

$$AC + BC' > AC' + BC;$$

nach beiderseitiger Wegnahme von $AC = AC'$ bleibt

$$BC' > BC.$$

Im zweiten Falle erhellt unmittelbar, dass $BC' > BC$ sein muss. Bei dritter Lage hat man

im Dreieck $AC'D$: $AC' + C'D > AD$,

mithin durch beiderseitige Hinzufügung von $BD$

$$AC' + BC' > AD + BD$$

oder auch

$$AC' + BC' > AC + CD + BD;$$

setzt man statt $CD + BD$ die weniger betragende Seite $BC$, so ist um so mehr

$$AC' + BC' > AC + BC$$

und nach beiderseitiger Wegnahme von $AC' = AC$

$$BC' > BC.$$

Man kann daher sagen: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten, aber nicht im zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, so sind auch die dritten Seiten verschieden, und zwar hat dasjenige Dreieck die grössere dritte Seite, worin die gegebenen Seiten den grösseren Winkel einschliessen.

Als allgemeines Resultat dieser Untersuchung ergiebt sich, dass ein Dreieck durch zwei Bestandteile nicht bestimmt ist; man bedarf daher wenigstens dreier Bestandteile, unter denen mindestens eine Seite vorkommen muss, weil nach dem unter *a)* Gesagten die drei Winkel nicht ausreichen.

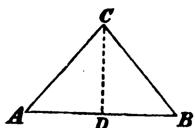
## § 7.

## Bestimmung des Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln.

*a*) Wenn von einem Dreiecke zwei Winkel (mithin alle Winkel) und eine Seite $AB$ gegeben sind, so können wir uns denken, dass zuerst die gegebene Seite $AB$ gezeichnet worden sei und an diese die bekannten anliegenden Winkel $A$ und $B$ angesetzt werden. Dies geschieht dadurch, dass wir den Scheitel des Winkels $A$ auf den Endpunkt $A$ der gegebenen Geraden und den einen seiner Schenkel auf $AB$ legen; der andere Schenkel von $A$ giebt dann die Richtung an, in welcher die Dreieckseite $AC$ liegen muss. Verfahren wir ebenso mit dem Winkel $B$, so erhalten wir die Richtung, in welcher die Seite $BC$ zu suchen ist. Beide Richtungen durchschneiden sich in $C$ und dieser Punkt muss nun die Spitze des Dreiecks sein, weil er, als Durchschnitt der beiden anderen Dreieckseiten, sowohl in der einen als in der anderen Seite, also auch in der einen wie in der anderen Richtung liegen muss. Da sich aber zwei Gerade, hier die jedesmaligen zweiten Schenkel der Winkel $A$ und $B$, nur in einem Punkte schneiden (§ 2, II.), so entsteht auch nur ein ganz bestimmtes Dreieck, welches die gegebenen Bestandteile enthält, d. h.: Ein Dreieck ist durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt. Hieraus folgt weiter: Zwei Dreiecke sind kongruent, sobald sie in einer Seite und zwei ähnlich liegenden Winkeln übereinstimmen.

*b*) In dem einfachen Falle, wo die beiden an der Seite $AB$ liegenden Winkel einander gleich sind, ist es leicht, auch das Verhältnis der Seiten $AC$ und $BC$ ausfindig zu machen. Denkt man sich nämlich den Winkel $C$ durch eine Gerade halbiert, welche $AB$ in $D$ schneidet, so zerfällt das Dreieck $ABC$ in zwei andere Dreiecke $ACD$ und $BCD$; diese besitzen die Seite $CD$ gemeinschaftlich und stimmen ausserdem noch in zwei Winkeln überein; es ist nämlich $\angle BAC = \angle ABC$ wegen der Voraus-

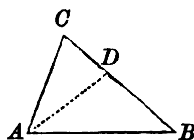
Fig. 15.



setzung, und $\angle ACD = \angle BCD$ durch Konstruktion. Hieraus zusammen folgt, dass die Dreiecke $ADC$ und $BDC$ kongruent sind, also in allen Bestandteilen übereinstimmen, und dass mithin auch $AC = BC$ ist; dies giebt den Satz: Zwei gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen auch gleiche Seiten gegenüber, oder: Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist auch ein gleichschenkliges Dreieck.

*c)* Mit Hilfe dieses Theoremes lässt sich der Fall, dass $A$ grösser oder kleiner als $B$ ist, etwas näher erörtern. Ist etwa $A$ der grössere Winkel, so denke man sich den Winkel $B$ davon subtrahiert, nämlich $AD$ so gelegt, dass $\angle BAD = \angle ABD$ ist; das Dreieck $ABD$ hat dann zwei gleiche Winkel und mithin sind nach dem vorigen die Seiten $AD$ und $BD$ einander gleich. In dem Dreiecke $ACD$ ist nun weiter

Fig. 16.




$$AD + CD > AC \text{ (§ 3, II.)},$$

oder, wenn man statt $AD$ die gleiche Seite $BD$ setzt,

$$BD + CD > AC \text{ oder } BC > AC,$$

d. h.: Dem grösseren Winkel in einem Dreieck liegt auch die grössere Seite gegenüber.

## § 8.

## Bestimmung des Dreiecks aus zwei Seiten und einem Winkel.

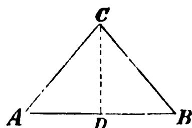
Nachdem wir die Bestimmung eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln erörtert haben, gehen wir weiter, indem wir für den einen von jenen Winkeln eine Seite aufnehmen und zusehen, ob sich aus zwei Seiten und einem Winkel ein Dreieck bestimmen lässt. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich der gegebene Winkel zwischen den gegebenen Seiten liegt oder nicht.

I. *a)* Sind von einem Dreiecke zwei Seiten und der Winkel, welchen sie einschliessen, gegeben, so denke man sich zuerst den Winkel gezeichnet und auf seine Schenkel vom Scheitel aus die gegebenen Seiten aufgetragen. Auf den Schenkeln des

Winkels erhält man hierdurch zwei Punkte, welche man nur noch durch eine Gerade zu verbinden braucht, um sogleich ein Dreieck zu bekommen, welches in der That die gegebenen Bestandteile enthält. Da es aber zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade giebt, so ist jenes Dreieck auch das einzige, welches die gegebenen Bestandteile enthält; d. h.: Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt. Hieraus folgt weiter: Zwei Dreiecke sind kongruent, sobald sie in zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.

*b)* Einige Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wenn die zwei gegebenen Seiten des Dreiecks einander gleich sind: $AC = BC$. Denkt man sich hier die Halbierungslinie $CD$ des Winkels $C$ gezogen, so entstehen die beiden Dreiecke $ACD$ und $BCD$; in diesen ist der Voraussetzung nach $AC = BC$, ferner $CD$ beiden gemeinschaftlich, endlich $\angle ACD = \angle BCD$ vermöge der Konstruktion. Die beiden Dreiecke $ADC$ und $BDC$ stimmen also in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind daher kongruent und führen zu der Folgerung $\angle BAC = \angle ABC$; d. h.: Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

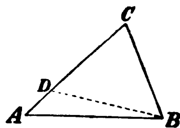
Fig. 17.




Auf das gleichseitige Dreieck angewendet, giebt dies noch den Satz: Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind einander gleich, und zwar ist jeder $= \frac{2}{3}R = 60^0$.

*c)* Sind dagegen die Seiten $AC$ und $BC$ ungleich, etwa $AC$ die grössere, so schneide man von $C$ aus die kleinere auf der grösseren ab, so dass $CD = CB$ wird; es entsteht hierdurch ein gleichschenkliges Dreieck, und in diesem ist nach dem vorigen $\angle CBD = \angle CDB$. Der letztere bildet zugleich den Aussenwinkel des Dreiecks $ABD$ und ist deshalb $= \angle ABD + \angle BAD$, folglich ganz sicher grösser als $\angle BAD$ allein. Aus der so gewonnenen Ungleichung $\angle CDB > \angle BAD$ folgt nun, wenn statt $\angle CDB$ der ihm gleiche $\angle CBD$ gesetzt wird, $\angle CBD > \angle CAB$; um so

Fig. 18.

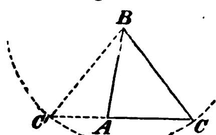


mehr aber ist $\angle CBA > \angle CAB$, weil jetzt an die Stelle des ohnehin Grösseren etwas noch Grösseres gesetzt worden ist; also: Der grösseren Seite eines Dreiecks liegt jedesmal der grössere Winkel gegenüber.

II. In dem zweiten Falle, wenn zwei Seiten des Dreiecks und einer der nicht eingeschlossenen Winkel gegeben sind, unterscheiden wir, ob der Winkel der grösseren oder der kleineren jener Seiten gegenüberliegt.

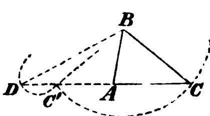
Sind nun erstlich gegeben $AB$, $BC$ und $\angle A$, wobei $BC > AB$ ist, so konstruiere man zuerst den Winkel $A$ und nehme von seinem Scheitel aus auf dem einen seiner Schenkel eine Strecke $= AB$, so hat man zwei Ecken $A$ und $B$ des fraglichen Dreiecks. Um nun die dritte Ecke zu finden, berücksichtige man, dass dieselbe einerseits auf dem Winkelschenkel $AC$ liegen, ausserdem aber noch von $B$ um die gegebene Gerade $BC$ entfernt sein muss. Denkt man sich aus $B$ mit dem Halbmesser $BC$ einen Kreis beschrieben, so bildet dieser den Inbegriff aller derjenigen Punkte, welche von $B$ um $BC$ entfernt sind, und folglich muss sich der Punkt $C$ auf dieser Kreislinie befinden; da er ausserdem noch auf dem Winkelschenkel $AC$ liegen muss, so giebt jetzt der Durchschnitt des Kreises und des in Rede stehenden Winkelschenkels die dritte Ecke und somit das ganze Dreieck. Es schneidet aber der Kreis den Winkelschenkel oder dessen Verlängerung zum zweiten Male* in $C'$, und so wäre es wohl möglich, dass hier aus den gegebenen Bestandteilen zwei

Fig. 19.




* Da $AB$ kleiner als der Kreishalbmesser $CB$ ist, so liegt $A$ im Innern des in Rede stehenden Kreises und folglich muss eine Gerade durch $A$ den Kreis wenigstens zweimal schneiden, beim Eintritte in den Kreis und beim Austritte aus demselben. Dass aber die Gerade den Kreis nicht zum dritten Male schneidet, erhellt so. Wäre $D$ der dritte Durchschnittspunkt, so müsste wegen der Gleichheit aller Halbmesser $BD = BC'$ und auch $BD = BC$ sein; aus dem ersten folgt $\angle BDC = \angle BC'D$ und aus dem zweiten $\angle BDC = \angle BCC'$; also wäre auch $\angle BC'D = \angle BCC'$, was unmöglich ist, weil der Aussenwinkel $BC'D$ mehr betragen muss als der gegenüberliegende Innenwinkel $BCC'$.

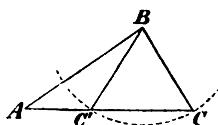
Fig. 20.



Dreiecke herzustellen wären; dem ist jedoch nicht so; das Dreieck $ABC''$ stimmt zwar in zwei Seiten ($AB = AB$ und $BC' = BC$) mit dem Dreiecke $ABC$ überein, dagegen besitzt es nicht den Winkel $BAC$, sondern dessen Nebenwinkel; demnach giebt es nur ein einziges Dreieck, welches die gegebenen Bestandteile enthält, d. h.: Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel bestimmt; oder auch: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen und ausserdem die den jedesmaligen grösseren Seiten gegenüberliegenden Winkel beiderseits gleich sind.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn der gegebene Winkel $A$ nicht der grösseren, sondern der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt, wo umgekehrt $BC$ kleiner als $AB$ ist. Die vorige Konstruktion bleibt dann zwar ungeändert, aber es fällt der zweite Durchschnitt $C'$ nicht in die Verlängerung von $AC$, sondern zwischen $A$ und $C$, und hier giebt es in der That zwei, in den Grundlinien $AC$ und $AC'$ verschiedene Dreiecke $ABC$ und $ABC'$, welche gleichwohl in zwei Seiten $AB = AB$, $BC' = BC$ und ebenso in einem Winkel $BAC$ übereinstimmen. Demnach ist in diesem Falle das Dreieck im allgemeinen nicht bestimmt, im Gegenteile findet hier eine Zweideutigkeit statt.

Fig. 21

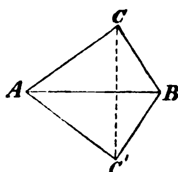



## § 9.

## Bestimmung des Dreiecks aus seinen drei Seiten.

Betrachten wir endlich noch den letzten Fall der Bestimmung eines Dreiecks, denjenigen nämlich, in welchem die drei Seiten desselben gegeben sind. Denken wir uns zuerst die eine Seite des Dreiecks, und zwar die längste, $AB$, hingelegt, so muss der Endpunkt $C$ der zweiten Seite $AC$ offenbar auf einer Kreislinie zu suchen sein, welche aus $A$ mit dem Halbmesser $AC$ beschrieben werden kann, denn auf dieser Kreislinie liegen alle Punkte,

Fig. 22.



welche von $A$ um $AC$ abstehen. Da aber $C$ nicht nur der Endpunkt von $AC$, sondern auch der Endpunkt der dritten Seite $BC$ ist und folglich um die gegebene Entfernung $BC$ von $B$ entfernt sein muss, so ist aus einem ähnlichen Grunde der Punkt $C$ auch auf derjenigen Kreislinie zu suchen, welche um $B$ mit dem Halbmesser $BC$ beschrieben werden kann. Der Punkt $C$ liegt aber nur dann auf beiden Kreislinien zugleich, wenn er der Durchschnittspunkt derselben ist, und hierdurch erhält man die dritte Ecke $C$ des Dreiecks und somit das ganze Dreieck. Es könnte nun sein, dass sich die Kreise mehrmals schnitten, ausser im Punkte $C$ z. B. noch im Punkte $C'$, es würden dann mehrere Dreiecke, wie hier $ABC'$, entstehen, welche aus denselben drei Seiten wie $ABC$ zusammengesetzt sind. Um zu entscheiden, ob diese anderen Dreiecke von dem ersten verschieden sind oder nicht, bringen wir eins derselben in eine solche Lage, dass $C$ und $C'$ auf entgegengesetzten Seiten von $AB$ liegen (wenn diese Lage nicht von Hause aus stattfinden sollte) und ziehen die Gerade $CC'$. Da nach der Konstruktion $AC = AC'$ und $BC = BC'$ ist, so sind die Dreiecke $ACC'$ und $BCC'$ beide gleichschenklig, und mithin haben wir

$$\angle ACC' = \angle AC'C,$$
$$\angle BCC' = \angle BC'C;$$

durch Addition dieser Gleichungen folgt augenblicklich

$$\angle ACB = \angle AC'B;$$

die Dreiecke stimmen also ausser in den Seiten noch in einem Winkel, mithin in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und sind folglich kongruent. Wir haben daher den Satz: Ein Dreieck ist durch seine drei Seiten bestimmt, oder: Zwei Dreiecke sind kongruent, sobald sie in den drei Seiten der Reihe nach übereinstimmen.

Fassen wir alles zusammen, was wir über die Bestimmung der Dreiecke kennen gelernt haben, so können wir sagen: Ein Dreieck ist durch drei Bestandteile, unter denen sich wenigstens eine Seite befinden muss, vollkommen bestimmt; kürzer noch lässt sich dies so ausdrücken: drei voneinander unabhängige Bestandteile reichen zur Bestimmung eines Dreiecks hin, wo der Fall dreier Winkel

durch den Zusatz „unabhängig“ ausgeschlossen ist, weil der dritte Winkel von den zwei ersten abhängt $[C = 2R - (A + B)]$. Als Ausnahme von diesem Satze ist einzig und allein der zweideutige Fall zu betrachten, in welchem zwei Seiten und der gegenüber der kleineren von ihnen liegende Winkel gegeben sind.

Unter besonderen Umständen kann eine geringere Anzahl von Bestandteilen zur Bestimmung des Dreiecks ausreichen, nämlich dann, wenn das Dreieck einer speziellen Klasse von Dreiecken angehört. So ist z. B. das gleichschenklige Dreieck schon durch zwei Seiten (nämlich Grundlinie und Schenkel) oder durch eine Seite und einen Winkel bestimmt; das gleichseitige Dreieck bestimmt sich durch eine Seite allein.

## § 10.

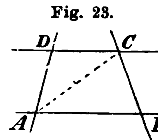
## Eigenschaften und Bestimmung der Vier- und Vielecke.

I. Da sich jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt, so ist leicht einzusehen, auf welche Weise man die Frage: „Wie viel Bestimmungsstücke gehören zu einem Vielecke?“ zu beantworten im stande sein wird. Bleiben wir zunächst bei einem Vierecke $ABCD$ stehen und denken uns die Diagonale $AC$ desselben gezogen, so zerfällt es in zwei Dreiecke $ABC$ und $ACD$, welche die Seite $AC$ gemeinschaftlich besitzen. Es ist unmittelbar klar, dass das ganze Viereck bestimmt sein wird, wenn seine beiden Teile, die Dreiecke $ABC$ und $ACD$, bestimmt sind, und demnach wären $2 . 3 = 6$ Bestandteile nötig; da aber die Seite $AC$ in beiden Dreiecken vorkommt, so fallen zwei von den sechs Bestandteilen jener Dreiecke (oder des Vierecks) in einen einzigen zusammen und es bleiben daher nur noch fünf übrig, d. h.: Zur Bestimmung eines Vierecks sind im allgemeinen fünf Bestandteile notwendig.

Wir sagen hier „im allgemeinen“, weil man auch mit einer geringeren Zahl Bestandteile auskommen kann, sobald das Viereck kein beliebiges ist, sondern einer bestimmten Klasse angehört und ebendeswegen besondere Eigenschaften besitzt. Wir wollen diese Untersuchung genauer durchführen.

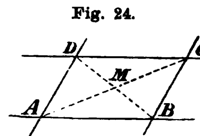
*a)* Das Trapez. Zieht man in dem Trapez $ABCD$ die Diagonale $AC$, so werden wie bisher drei Stücke zur Bestimmung des Dreiecks $ABC$ erfordert, welches den ersten Teil des ganzen Trapezes ausmacht. Von dem zweiten Dreiecke $ACD$ kennen wir nun erstlich die Seite $AC$, ferner den Winkel $ACD$, weil vermöge der Definition des Trapezes $CD$ parallel zu $AB$ liegen, mithin $\angle ACD = \angle BAC$ sein muss, und demnach fehlt zur Bestimmung des Dreiecks $ACD$ nur noch ein einziger Bestandteil; dieser giebt mit den Bestandteilen des Dreiecks $ABC$ zusammen vier Bestandteile, d. h.: Zur Bestimmung eines Trapezes sind nur vier Bestandteile erforderlich.

Fig. 23.




*b)* Das Parallelogramm. Die beiden Dreiecke $ABC$ und $ACD$, in welche das Parallelogramm $ABCD$ durch die Diagonale $AC$ zerlegt wird, haben die Seite $AC$ gemeinschaftlich; ausserdem sind die Winkel $BAC$ und $DCA$ als Wechselwinkel und aus demselben Grunde die Winkel $ACB$ und $CAD$ einander gleich; die in Rede stehenden Dreiecke stimmen demnach in einer Seite und zwei Winkeln überein, sind folglich kongruent und führen deshalb zu den Gleichungen $AB = CD$ und $BC = DA$, d. h.: In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich. Man wird übrigens leicht bemerken, dass dieser Satz auch umgekehrt gilt, d. h.: Ein Viereck mit gleichen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

Fig. 24.



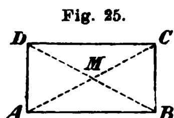

Zieht man noch die zweite Diagonale $BD$, welche die erste in $M$ schneidet, so zerfällt das Parallelogramm in vier Dreiecke, von denen je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind. In Beziehung auf die Dreiecke $ABM$ und $CDM$ hat man z. B. nach dem vorigen $AB = CD$, $\angle ABM = \angle CDM$ und $\angle AMB = \angle CMD$ (als Scheitelwinkel), mithin Übereinstimmung in einer Seite und den Winkeln, folglich auch Kongruenz. Vermöge der letzteren ist $AM = CM$ und $BM = DM$, d. h.: Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbieren sich gegenseitig. Auch dieser Satz kann umgekehrt werden, nämlich: Ein Viereck, dessen

Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm.

Aus den angegebenen Eigenschaften folgt, dass das Parallelogramm $ABCD$ bestimmt ist, sobald man entweder seine Hälfte, nämlich das Dreieck $ABC$, oder eins der Dreiecke $ABM$, $BCM$, $CDM$, $DAM$ kennt; in jedem Falle heisst dies: Zur Bestimmung eines Parallelogrammes sind nur drei Bestandteile erforderlich.

*c)* Das Rechteck. Einfacher gestalten sich die vorigen Verhältnisse, wenn die Winkel des Parallelogrammes gleich werden, also letzteres in ein Rechteck übergeht. Ausser der Gleichheit der Gegenseiten findet hier noch die Gleichheit der Diagonalen statt, weil die Dreiecke $ABC$ und $BAD$ in zwei Seiten ($AB = BA$ und $BC = AD$) und in dem rechten Winkel übereinstimmen, mithin kongruent sind. Da ferner von gleichen Linien auch die Hälften gleich sein müssen, so hat man weiter $MA = MB = MC = MD$ oder in Worten: Der Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Rechtecks ist von den Ecken desselben gleich weit entfernt.*

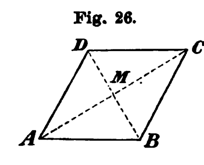
Fig. 25.




Mittelst der Bemerkung, dass das Rechteck als das Doppelte eines rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden kann, und dass letzteres durch seine beiden Katheten schon bestimmt ist, hat man noch den Satz: Ein Rechteck wird durch zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten bestimmt.

*d)* Der Rhombus. Wenn ein Viereck gleiche Seiten enthält, so ist $AB = BC = CD = DA$, und es stimmen daher die Dreiecke $ABC$ und $CDA$ in allen Seiten überein; hieraus folgt ihre Kongruenz und weiter $\angle CAB = \angle ACD$, mithin $AB \parallel CD$, ebenso $\angle BCA = \angle DAC$ und $BC \parallel DA$; d. h.: Ein Rhombus kann als Parallelogramm

Fig. 26.




* Betrachtet man $M$ als den Mittelpunkt der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $ABC$, so kann man den obigen Satz auch folgendermassen aussprechen: In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist der Mittelpunkt der Hypotenuse gleich weit entfernt von den drei Spitzen des Dreieckes.

mit zwei gleichen anliegenden Seiten ($AD = AB$) betrachtet werden.

Zieht man noch die zweite Diagonale $BD$, welche die erste in $M$ schneidet, so ist $AB = CB$, ferner wie bei jedem Parallelogramme $MA = MC$, endlich $MB$ sich selbst gleich; die Dreiecke $ABM$ und $CBM$ sind demnach wegen der Übereinstimmung in allen drei Seiten kongruent, und es folgt daraus die Gleichheit der Nebenwinkel $AMB$ und $CMB$, sowie die Kongruenz der vier Dreiecke $ABM$, $CBM$, $CDM$, $ADM$, d. h.: Die Diagonalen eines Rhombus schneiden sich rechtwinklig und teilen das Viereck in vier kongruente Dreiecke.

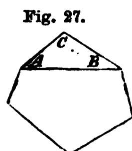
Da hiernach der Rhombus $ABCD$ als das Vierfache des rechtwinkligen Dreieckes $ABM$ betrachtet werden kann, so hat man den Satz: Der Rhombus ist durch zwei Bestandteile bestimmt.

*e)* Das Quadrat kann ebensowohl als gleichseitiges Rechteck wie als rechtwinkliger Rhombus betrachtet werden, und daher finden alle obigen Sätze statt, nämlich: Die Diagonalen des Quadrats sind einander gleich, schneiden sich rechtwinklig und teilen das Viereck in vier kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.

Für die Bestimmung des Quadrates hat man den einfachsten aller bisherigen Sätze, nämlich: Das Quadrat ist durch seine Seite allein bestimmt.

II. Wie man diese Betrachtungen weiter fortsetzen und dadurch die Anzahl der Bestandteile finden könnte, welche zur Bestimmung von Fünf-, Sechsecken u. s. w. notwendig sind, erhellt aus dem bisherigen ohne Schwierigkeit; um aber der Betrachtung selbst gleich das allgemeinste Gepräge zu verleihen, wollen wir die Frage beantworten, wieviel im allgemeinen Bestandteile gegeben sein müssen, damit ein Vieleck von $n$ Seiten bestimmt sei. — Denken wir uns ein Vieleck von beliebig vielen Seiten und über einer Seite $AB$ desselben ein Dreieck konstruiert, dessen Seiten $AC$ und $BC$ nicht in die Verlängerungen der anstossenden Vieleckseiten fallen, so nimmt das Vieleck um eine Seite zu. Von dem

Fig. 27.



angesetzten Dreiecke müssen, wenn dasselbe bestimmt sein soll, drei Bestandteile gegeben sein, und da einer derselben, die Seite $AB$, von Hause aus bekannt ist, so bedarf es nur noch der Angabe zweier Bestandteile dieses Dreieckes, d. h. des ganzen Vieleckes, weil das Dreieck ein Stück vom Vielecke ist. Mit anderen Worten: wenn die Seitenzahl eines Vieleckes um Eins zunimmt, so wächst die Anzahl der zur Bestimmung des Vieleckes nötigen Bestandteile um Zwei.

Gehen wir nun von dem Dreiecke aus, zu dessen Bestimmung drei Bestandteile erfordert wurden, so folgt, dass zur Bestimmung

eines 4Ecks gehören $5 = 2 . 4 - 3$ Bestandteile,
" 5 " " $7 = 2 . 5 - 3$ "
" 6 " " $9 = 2 . 6 - 3$ "
u. s. f.

Zur Bestimmung eines Vieleckes von $n$ Seiten gehören demnach im allgemeinen $2n - 3$ Bestandteile.

Auch hier können, wie beim Viereck, Fälle eintreten, in welchen man mit einer geringeren Anzahl von Bestandteilen auskommt. Bei einem Vielecke z. B., dessen Seiten und Winkel gleich sind, d. h. bei einem regelmässigen Vielecke, kennt man die Winkel gleich von vornherein [da nämlich die $n$ gleichen Winkel zusammen die Winkelsumme $(2n - 4) R$ ausmachen sollen, so muss jeder der $n^{te}$ Teil von $(2n - 4) R$ sein], und man bedarf folglich nur noch der Kenntnis der Seiten, d. h. einer Seite, weil sämtliche Seiten einander gleich sein sollen. Dies giebt den Satz: Ein regelmässiges Vieleck ist durch eine seiner Seiten bestimmt.

Der vorige, von der Bestimmung des Quadrats handelnde Satz ist nur ein spezieller Fall dieses Theoremes; das reguläre Viereck nämlich und das Quadrat sind eine und dieselbe Figur, wie man sogleich aus den bisher entwickelten Eigenschaften des Quadrats erkennen wird.

---

## Konstruktionen zu Kap. II.

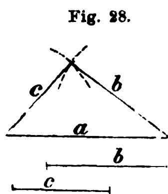
Wenn wir in dem vorhergehenden gezeigt haben, dass ein Vieleck völlig bestimmt ist, sobald nur eine gewisse Anzahl

seiner Bestandteile gegeben vorliegt, so haben wir damit bewiesen, dass es jederzeit möglich sein muss, aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Bestandteile die übrigen noch unbekannten Teile zu finden, und dieser Nachweis würde für eine rein theoretische Auffassung der Wissenschaft hinreichen. In der Praxis verlangt man aber mehr; hier genügt die Möglichkeit nicht, das Unbekannte finden zu können, man will vielmehr dasselbe in Wirklichkeit hergestellt sehen. Sowie man nun in der Arithmetik unbekannte Grössen aus gegebenen Grössen ableitet, wenn jene mit diesen in einem bestimmten Zusammenhange stehen, so kann man auch in der Geometrie unbekannte Gebilde aus bekannten oder gegebenen Gebilden ableiten, wenn zwischen beiden ein Zusammenhang stattfindet, und so wie dort die unbekannte Grösse gefunden wird, wenn man die gegebenen Grössen auf gewisse Weise durch Rechnung miteinander verknüpft, so entsteht auch hier das unbekannte Gebild aus den bekannten, indem man letztere auf gewisse Weise zu ferneren Gestalten miteinander verbindet. Eine solche Verbindung gegebener Gebilde, welche zur Kenntnis eines gesuchten unbekannten Gebildes führt, heisst eine geometrische Konstruktion und wird durch diesen Namen insofern passend bezeichnet, als in der That ein solches Verfahren mit einem Zusammenbau gegebener Stücke Ähnlichkeit besitzt. Um aber derartige Konstruktionen ausführen zu können, muss man eine oder einige der einfachsten Konstruktionen voraussetzen; diese Fundamentalkonstruktionen sind: Erstlich, zwischen zwei gegebenen Punkten eine Gerade zu ziehen, und zweitens, aus einem gegebenen Punkte mit einem vorgeschriebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben (mechanisch werden diese Aufgaben bekanntlich mit Hilfe des Lineals und Zirkels gelöst). Jede Konstruktion, welche nur aus einer endlichen Anzahl von Wiederholungen dieser Grundkonstruktionen besteht, heisst eine elementargeometrische, dagegen gehört jede Konstruktion, welche noch andere Hilfsmittel als Gerade und Kreis voraussetzt, in das Gebiet der höheren Geometrie.

1. Aus den drei gegebenen Seiten eines Dreieckes das Dreieck selbst zu konstruieren. Sind $a$, $b$, $c$ die

gegebenen Seiten, so beschreibe man aus dem einen Endpunkte von $a$ einen Kreis (oder auch nur Kreisbogen) mit dem Halbmesser $b$, und aus dem anderen Endpunkte von $a$ ebenfalls einen Kreis mit dem Halbmesser $c$; den Durchschnittspunkt beider Kreise verbinde man mit den Endpunkten von $a$ durch gerade Linien, so hat man das verlangte Dreieck, wie sich aus den in § 8 durchgeführten Betrachtungen auf der Stelle ergiebt. Sollten sich die mit den Halbmessern $b$ und $c$ beschriebenen Kreise nicht schneiden, so wäre aus den Seiten $a$, $b$ und $c$ auch kein Dreieck möglich; dieser Fall würde z. B. eintreten, wenn $b + c$ nicht mehr betrüge als $a$.

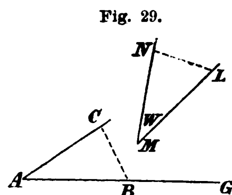
Fig. 28.




Berücksichtigt man, dass es mittels des angegebenen Verfahrens immer möglich ist, ein Dreieck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke in den Seiten übereinstimmt, und bedenkt man weiter, dass bei einer solchen Kopie des Dreieckes gleichzeitig die Winkel kopiert werden, so erhält man eine Konstruktion für die folgende Aufgabe:

2. An den Endpunkt einer gegebenen Geraden eine zweite Gerade so anzulegen, dass beide einen gegebenen Winkel einschliessen. Ist $AG$ die gegebene Gerade und $w$ der gegebene Winkel, so verbinde man zwei auf den Schenkeln desselben beliebig gewählte Punkte $L$ und $N$ durch eine Gerade und konstruiere nun ein Dreieck, welches die Seiten $AB = ML$, $BC = LN$ und $AC = MN$ hat; dann sind die Dreiecke $BAC$ und $LMN$ wegen der Übereinstimmung in allen Seiten kongruent und folglich ist $\angle BAC = \angle LMN = w$, wie verlangt wurde. In der Praxis ist es am bequemsten, die Seiten $LM$ und $MN$ einander gleich zu nehmen, so dass $w$ der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes wird.

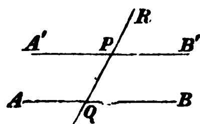
Fig. 29.




Von diesem Verfahren zur Abtragung oder Übertragung eines Winkels von einer Stelle zur anderen lässt sich ein vorteilhafter Gebrauch zur Lösung der folgenden Aufgabe machen:

3. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel läuft. Ist $AB$ die gegebene Gerade, und $P$ der (ausser ihr) gegebene Punkt, so verbinde man denselben mit irgend einem Punkte $Q$ der Geraden $AB$ durch eine gerade Linie $RPQ$ und trage den entstehenden Winkel $RQB$ so an $P$, dass $\angle RPB' = \angle RQB$ wird; es ist dann der Winkelschenkel $PB'$ oder die Gerade $A'B'$ parallel zu $AB$, wie sogleich aus dem Satze folgt, dass zwei Gerade parallel laufen, sobald sie mit einer dritten gleiche korrespondierende Winkel bilden.

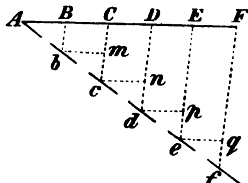
Fig. 30.




Unter den Aufgaben, welche sich durch Ziehen von Parallelen lösen lassen, ist die folgende besonders wichtig:

4. Eine Gerade von gegebener Länge in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zu teilen. Man lege an die gegebene Gerade $AF$ unter einem beliebigen Winkel eine zweite Gerade $Af$, welche den Anfangspunkt mit der ersten gemein hat; auf dieser zweiten Geraden trage man eine Strecke $Ab$ von willkürlicher Länge mehrmals hintereinander auf ($Ab = bc = cd = de = ef$), und zwar sovielmal, als die Anzahl der gleichen Teile beträgt, in welche $AF$ geteilt werden soll; den letzten so erhaltenen Punkt $f$ verbinde man mit dem Endpunkte $F$ der gegebenen Geraden und ziehe nun durch $b$, $c$, $d$ u. s. w. Parallelen zu $fF$, so teilen diese $AF$ in die verlangte Anzahl gleicher Teile. — Zunächst ist leicht zu sehen, dass $AF$ bei diesem Verfahren in ebensoviel Teile geteilt wird wie $Af$; denn da die Parallelen $bB$, $cC$, $dD$ u. s. w. nicht zusammentreffen, so schneidet jede die Gerade $AF$ in einem anderen Punkte und mithin entstehen auf $AF$ ebensoviel Teilungspunkte, als auf $Af$ vorhanden, also vorgeschrieben waren. Dass aber die Teile $AB$, $BC$, $CD$ u. s. w. auch einander gleich sind, erkennt man leicht, wenn die Geraden $bm$, $cn$, $dp$ u. s. w. parallel zu $AF$ gezogen werden; es entstehen dann die Parallelogramme $BCmb$, $CDnc$, $DEpd$ u. s. w., und in diesen sind nach § 10, I die Gegen-

Fig. 31.

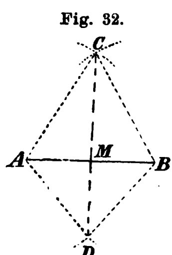


seiten einander gleich, also $BC = bm$, $CD = cn$, $DE = dp$ u. s. w. Kann man nun nachweisen, dass $AB$, $bm$, $cn$, $dp$ u. s. w. unter sich gleich sind, so folgt augenblicklich nach dem vorigen, dass jetzt auch $AB$, $BC$, $CD$ u. s. w. einander gleich sind. Die sämtlichen Dreiecke $AbB$, $bcm$, $cdn$, $dep$ u. s. w. stimmen aber erstlich überein in den Seiten $Ab$, $bc$, $cd$ u. s. w. (vermöge der Konstruktion); ferner in den korrespondierenden Winkeln $BAb$, $mbc$, $ncd$ u. s. w. einerseits und $AbB$, $bcm$, $cdn$ u. s. w. andererseits, und sind mithin sämtlich kongruent; daraus folgt denn $AB = bm = cn = dp$ u. s. w., und nach dem obigen $AB = BC = CD = DE$ u. s. w.

In dem Falle, wo es sich um eine Teilung in nur zwei gleiche Teile handelt, kann man sich auch eines anderen Verfahrens bedienen, welches wir, da es kürzer als das vorige ist, noch besonders erwähnen wollen.

5. Eine Gerade von gegebener Länge zu halbieren. Man beschreibe über und unter der gegebenen Geraden $AB$ gleichschenklige Dreiecke $ABC$ und $ABD$, was sich nach Nr. 1 ausführen lässt, wenn man $AB = a$ und $b = c$ nimmt; die Spitzen dieser Dreiecke verbinde man durch eine Gerade $CD$, so schneidet diese die gegebene Gerade im Halbierungspunkte $M$. Die Dreiecke $ACD$ und $BCD$ stimmen nämlich in den Seiten $AC$ und $BC$, $AD$ und $BD$ überein (vermöge der Konstruktion) und besitzen die Seite $CD$ gemeinschaftlich; sie sind mithin nach § 9 kongruent, woraus $\angle ACD = \angle BCD$ folgt. Die Dreiecke $AMC$ und $BMC$ haben nun erstlich die Seite $CM$ gemein, ferner ist in ihnen $AC = BC$ (vermöge der Konstruktion), und ausserdem sind nach dem vorigen die Winkel $ACM$ und $BCM$ gleich; daraus zusammen folgt die Kongruenz der fraglichen Dreiecke (nach § 8, I) und mithin ist auch $AM = BM$, also $M$ der Mittelpunkt von $AB$. Man kann noch bemerken, dass zugleich $\angle AMC = \angle BMC$, folglich, weil beide Winkel zusammen zwei Rechte ausmachen, jeder gleich einem Rechten sein muss; die Gerade $CD$ bildet also mit $AB$ einen rechten Winkel, und man sagt dann: $CD$ steht senkrecht auf $AB$, oder $CD$ ist normal zu $AB$.

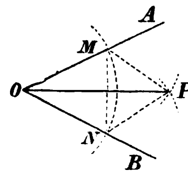
Fig. 32.



Nachdem wir gezeigt haben, wie sich Gerade in beliebig viele gleiche Teile teilen lassen, müssten wir nun eigentlich zeigen, wie man die Teilung von Winkeln auszuführen hätte. Diese Aufgabe übersteigt aber die Kräfte der Elementargeometrie; man kann mit Hilfe der geraden Linie und des Kreises einen beliebigen Winkel nur in zwei und ausserdem noch den rechten Winkel in drei gleiche Teile zerlegen, wie wir in dem nachfolgenden zeigen wollen.

6. Einen gegebenen Winkel zu halbieren. Auf den Schenkeln $AO$ und $BO$ des gegebenen Winkels $AOB$ nehme man vom Scheitel $O$ aus zwei gleiche Abschnitte $OM = ON$, sodass also das Dreieck $OMN$ ein gleichschenkliges Dreieck sein würde; über $MN$ als Basis beschreibe man nun ein zweites gleichschenkliges Dreieck $MNP$ (am bequemsten nimmt man $MP = OM$), so ist die Gerade $OP$ die Halbierungslinie des Winkels $AOB$. Da nämlich durch die Konstruktion $OM = ON$ und $MP = NP$ geworden und die Gerade $OP$ den Dreiecken $OMP$ und $ONP$ gemeinschaftlich ist, so stimmen letztere in allen Seiten überein und sind folglich kongruent. Man hat daher auch $\angle MOP = \angle NOP$, d. h. der Winkel $AOB$ ist in zwei gleiche Teile geteilt.

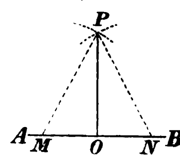
Fig. 33.




Die vorstehende Konstruktion ändert sich in nichts, wenn der Winkel $AOB$ ein gestreckter sein sollte; der halbe Winkel $MOP$ ist in diesem Falle ein rechter und man hat also dann die Aufgabe:

7. Auf einer gegebenen Geraden durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Senkrechte zu errichten, zu gleicher Zeit mit gelöst.

Fig. 34.




8. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Auf dem einen Schenkel $BO$ des gegebenen rechten Winkels $BOC$ nehme man vom Scheitel $O$ aus einen beliebigen Abschnitt $ON$ und errichte über diesem ein gleichseitiges Dreieck $ONU$; halbiert man noch den Winkel $NOU$ desselben durch die Gerade $OV$, so teilen die Geraden $OU$ und $OV$ den

Winkel $BOC$ in drei gleiche Teile. Da nämlich (nach § 8, $b$) $\angle NOU = \frac{2}{3} R$ ist, so muss $\angle COU = R - \frac{2}{3} R = \frac{1}{3} R$ sein, und da ferner jeder der gleichen Winkel $UOV$ und $NOV$ die Hälfte von $NOU$, d. h. die Hälfte von $\frac{2}{3} R$ ausmacht, so beträgt jeder $\frac{1}{3} R$, also ebensoviel wie $\angle COU$.

Fig. 35.

Kehrt man diese Betrachtung um, so erhält man die Auflösung der praktisch nicht unwichtigen Aufgabe:

9. Auf einer gegebenen Geraden eine durch ihren Endpunkt gehende Senkrechte zu errichten. Ist nämlich $O$ der Endpunkt, so nehme man den beliebigen Abschnitt $ON$, beschreibe über demselben das gleichseitige Dreieck $NOU$, halbiere den Winkel $NOU$ und mache darauf $\angle UOC = \angle UOV$, so ist der entstehende Winkelschenkel $OC$ die gesuchte Senkrechte. Der Winkel $NOC$ besteht nämlich aus den Winkeln $NOU$ und $UOC$, d. h. $NOU$ und $\frac{1}{2} NOU$, und ist folglich $= \frac{2}{3} R + \frac{1}{3} R = R$.

In den beiden Aufgaben 7 und 9, deren Lösungen sich hier mit ergaben, lag der Punkt, durch welchen die auf einer Geraden senkrecht zu errichtende Linie gehen sollte, immer in der Geraden selbst; für den Fall aber, dass er ausserhalb derselben liegt, gestaltet sich die Sache wie folgt.

10. Auf eine gegebene Gerade von einem bestimmten Punkte ausser ihr eine Senkrechte herabzulassen. Man verbinde den gegebenen Punkt $P$ mit einem beliebigen Punkte $M$ der gegebenen Geraden $AB$ durch die Gerade $MP$, mache auf der anderen Seite der Geraden $AB$ den Winkel $BMQ$ = dem Winkel $BMP$ und nehme $MQ = MP$, so steht die Gerade $PQ$ senkrecht auf $AB$. — Da nämlich $MP = MQ$, $\angle OMP = \angle OMQ$ und die Seite $MO$ den Dreiecken $MOP$ und $MOQ$ gemeinschaftlich ist, so sind die letzteren nach § 8, I kongruent; daraus folgt $\angle MOP = \angle MOQ$, und da beide Winkel den gestreckten Winkel $POQ$ ausfüllen, so ist der letztere in zwei gleiche Teile geteilt, d. h. $\angle MOP = \angle MOQ = R$.

Fig. 36.

Zu bemerken ist noch, dass die Gerade $MP$ jederzeit grösser als die Senkrechte $PO$ sein muss, weil $MP$ immer dem grösseren Winkel gegenüberliegt. Unter allen Verbindungslinien zwischen einem Punkte und einer Geraden ist also die Senkrechte von jenem auf diese die kürzeste und heisst deswegen auch die Entfernung des Punktes von der Geraden.

11. Einen rechten Winkel so zu legen, dass seine Schenkel durch zwei gegebene Punkte ($A$, $B$) gehen und seine Spitze auf eine gegebene Gerade ($DE$) fällt. Vermöge der Bemerkung, dass in einem rechtwinkligen Dreiecke die Spitze des rechten Winkels ebenso weit vom Mittelpunkte der Hypotenuse entfernt ist, als dieser von den Endpunkten der Hypotenuse, ergiebt sich folgende Konstruktion: man halbiere die Gerade $AB$ in $M$ und beschreibe aus $M$ mit $MA = MB$ als Halbmesser einen Kreis; schneidet dieser die Gerade $DE$ in den Punkten $C$ und $C'$, so sind $ACB$ und $AC'B$ die gesuchten Lagen des rechten Winkels. Dass in der That sowohl $ACB$ als $AC'B$ ein rechter Winkel ist, kann mittels der Hilfslinie $MC$ oder $MC'$ gezeigt werden; es entstehen nämlich zwei gleichschenklige Dreiecke $ACM$ und $BCM$; in dem ersten ist $\angle MAC = \angle MCA$ und der Aussenwinkel $CMB = \angle MAC + \angle MCA = 2 \angle MCA$; im zweiten Dreiecke hat man ähnlich $\angle MBC = \angle MCB$ und den Aussenwinkel $CMA = \angle MBC + \angle MCB = 2 \angle MCB$. Da nun die Summe der beiden Aussenwinkel zwei Rechte beträgt, so hat man auch

Fig. 37.

$$2 \angle MCA + 2 \angle MCB = 2R \text{ oder } \angle MCA + \angle MCB = R,$$

also $\angle ACB = R$, wie verlangt wurde. Für den Winkel $AC'B$ ist der Beweis ganz analog, indem nur $C'$ für $C$ eintritt.

Wenn, wie oben vorausgesetzt wurde, der Kreis die Gerade zweimal schneidet, so giebt es auch immer zwei Auflösungen des Problems; diese können verschieden oder gleich sein. Der erste Fall findet statt, sobald die Geraden $AB$ und $DE$ sich unter irgend einem spitzen Winkel schneiden; denn es sind dann die Dreiecke $ABC$ und $ABC'$ nicht kongruent; dagegen ent-

stehen zwei gleiche Auflösungen ($\triangle ABC \cong \triangle ABC'$), wenn $DE$ entweder parallel oder rechtwinklig zu $AB$ ist; geht die Gerade $DE$ durch einen der gegebenen Punkte $A$ und $B$, so degeneriert eines der Dreiecke $ABC$ und $ABC'$ zu einer geraden Linie; hat sie ferner mit dem Kreise nur einen Punkt gemein, so giebt es nur eine Auflösung, trifft endlich der Kreis die Gerade gar nicht, so hat die Aufgabe keine Lösung. Will man sich alle diese Fälle der Reihe nach zur Anschauung bringen, so braucht man die Gerade $DE$ nur um einen Punkt $D$ von ihr, dessen Abstand von $AB$ kleiner als der Kreishalbmesser ist, herumzudrehen und in verschiedenen Lagen die Konstruktion zu wiederholen; man wird dabei bemerken, dass jederzeit zwei Auflösungen existieren, solange der Durchschnitt von $AB$ und $DE$ zwischen die Punkte $A$ und $B$ fällt.

---

# Kap. III.

# Die Vergleichung und Ausmessung der Flächen geradliniger Figuren.

---

## § 11.

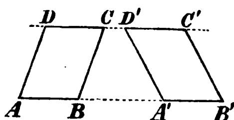
## Vergleichung der Flächen von Dreiecken und Parallelogrammen.

Wir nehmen den am Ende von § 10 abgebrochenen Faden wieder auf, um die geradlinigen Gebilde aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten. Die bisherige Untersuchung beschränkte sich auf die, so zu sagen, äusseren Bestandteile der geradlinigen Gestalten, auf die Geraden nämlich, aus denen sie zusammengesetzt sind, und auf die Winkel, welche die letzteren miteinander bilden. Sobald aber ein Gebild zu einer geschlossenen Figur wird, tritt etwas Neues hervor, nämlich die begrenzte Fläche, welche gewissermassen den Inhalt der Figur bildet. Haben wir nun bisher die Vielecke nach ihren

Seiten und Winkeln verglichen, so liegt es uns jetzt ob, auch die Flächen derselben einer Betrachtung zu unterwerfen. Diese Untersuchung würde sehr kurz ausfallen, wenn wir uns dabei auf kongruente Vielecke beschränken wollten, denn es ist unmittelbar klar, dass kongruente Vielecke auch gleiche Flächen haben; aber man sieht leicht ein, dass zur Gleichung der Flächen die Kongruenz der betreffenden Vielecke gar nicht notwendig ist. Schneiden wir z. B. von einem Vielecke durch eine Diagonale ein Dreieck ab und setzen dieses in einer anderen Lage irgendwo an das Übrige wieder an, so entsteht ein zweites Vieleck, das offenbar dieselbe Fläche wie das ursprüngliche besitzt, ohne ihm kongruent zu sein. Es ergiebt sich daraus sogleich die Frage, womit wir uns zu beschäftigen haben; sie lautet: Unter welchen Umständen sind Vielecke, abgesehen von ihrer Gestalt, einander an Fläche gleich? Die hierauf bezügliche Untersuchung würde mit dem einfachsten Polygone, nämlich mit dem Dreieck, anzufangen sein; man kann aber, ohne etwas Wesentliches zu ändern, auch das Parallelogramm zum Ausgangspunkte wählen, weil jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogrammes angesehen werden darf.

I. Sind zwischen parallelen Geraden zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gezogen, welche in den Seiten $AB$ und $A'B'$ (den Grundlinien) übereinstimmen, so entstehen zwei Trapeze $AA'D'D$ und $BB'C'C$, die zur Deckung gebracht werden können, wenn man das zweite um $AB = A'B'$ verschiebt, bis $BC$ auf $AD$ fällt. Hieraus folgt unmittelbar die Kongruenz dieser Trapeze und daraus die Gleichheit ihrer Flächen. Nimmt man von jedem derselben das Trapez $BA'D'C$ weg, so bleibt von dem ersten das Parallelogramm $ABCD$, vom zweiten das Parallelogramm $A'B'C'D'$; diese Reste müssen aber nach einem bekannten Grundsatze gleich sein, d. h.: Parallelogramme, welche zwischen denselben Parallelen liegen und gleiche Grundlinien haben, besitzen gleiche Flächen.

Fig. 38.



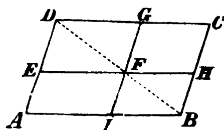

Man kann diesen wichtigen Satz noch auf einen anderen Ausdruck bringen, welcher sich durch seine Kürze empfiehlt.

Lässt man nämlich von zwei Punkten $M$ und $N$ einer Parallelen Senkrechte auf die andere Parallele herabfallen, so sind diese Senkrechten $MP$ und $NQ$ einander parallel, weil sie mit der Geraden $PQ$ gleiche korrespondierende Winkel bilden; das Viereck $MNQP$ ist mithin ein Parallelogramm (spezieller ein Rechteck), und in diesem sind die Gegenseiten $MP$ und $NQ$ gleich; d. h.: Parallele Gerade haben überall gleiche Entfernung voneinander. Nennen wir nun Höhe eines Parallelogrammes die Entfernung der Grundlinie von der Gegenseite, so lautet der oben ausgesprochene Satz folgendermassen: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleiche Flächen.

Da von zwei gleichen Grössen auch die Hälften gleich sind, so folgt hieraus unmittelbar der Satz: Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen besitzen gleiche Flächen.

II. Der vorigen Vergleichung zweier Parallelogramme, die in einer Seite (der Basis), nicht aber in den Winkeln übereinstimmen, lässt sich eine andere Vergleichung gegenüberstellen, bei welcher die Parallelogramme einen gemeinsamen Winkel, aber verschiedene Seiten besitzen. Zieht man nämlich durch einen Punkt $F$ in der Diagonale $BD$ eines Parallelogrammes $ABCD$ Parallelen zu den Seiten des Vierecks, so zerfällt dieses in die vier Parallelogramme $DEFG$, $AIFE$, $CGFH$, $BHFI$, von denen das erste und letzte in Dreiecke geteilt sind; dabei gelten folgende Beziehungen:

Fig. 39.




in dem Parallelogramme $ABCD$, $\triangle ABD = \triangle CDB$,
" " " $DEFG$, $\triangle DEF = \triangle GDF$,
" " " $BHFI$, $\triangle FIB = \triangle HFB$.

Nehmen wir die beiden letzten Flächen von der ersten weg, so müssen gleiche Flächen übrig bleiben; linker Hand besteht dieser Rest aus dem Parallelogramme $AIFE$, rechts aus dem Parallelogramme $CGFH$, diese Flächen sind also gleich, und man hat daher den Satz: Legt man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes Parallelen zu

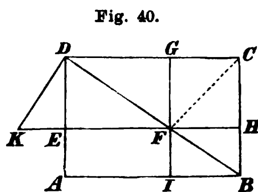
den Seiten desselben, so sind die auf entgegengesetzten Seiten der Diagonale liegenden neuen Parallelogramme an Fläche gleich.

## § 12.

## Vergleichung der Flächen von Rechtecken und Quadraten.

I. Das am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochene Theorem gestattet eine wichtige Anwendung auf das Rechteck $ABCD$, und zwar ist es hier von Interesse, den Punkt $F$ so zu wählen, dass eins der Rechtecke $AIFE$ und $CGFH$, etwa das letztere, zu einem Quadrate wird; man erreicht dies leicht, indem man den rechten Winkel bei $C$ halbiert und zum Punkte $F$ den Durchschnitt der Halbierungslinie mit der Diagonale $BD$ nimmt. Es ist nun das Quadrat $CGFH$ gleich dem Rechtecke $AEFI$, dessen Seiten sich näher angeben lassen, wenn man auf $FD$ in $D$ eine Senkrechte errichtet, welche die Verlängerung von $FE$ in $K$ schneidet. Zufolge dieser Konstruktion ist nämlich

Fig. 40.




$$\angle EDF + \angle EDK = R,$$

andererseits in dem rechtwinkligen Dreiecke $DEF$

$$\angle EDF + \angle DFE = R,$$

mithin durch beiderseitige Vergleichung

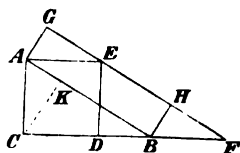
$$\angle EDK = \angle DFE = \angle HFB.$$

Die Dreiecke $EDK$ und $HFB$ stimmen also in den gleichnamigen Winkeln überein, sie sind ferner beide rechtwinklig; endlich ist noch $ED = HF$, weil beide Linien $= FG$ sind; aus dieser Übereinstimmung in einer Seite und zwei Winkeln folgt nun die Kongruenz der Dreiecke $EDK$ und $HFB$, daraus $EK = HB$ oder $EK = EA$. In Beziehung auf das rechtwinklige Dreieck $FDK$ betrachtet, hat das Quadrat $CGFH$ die Senkrechte $DE$ zur Seite, und die Seiten des Rechteckes $AEFI$ bestehen aus den Abschnitten $EF$ und $EK = EA$ der Hypotenuse; wäre das rechtwinklige Dreieck $FDK$ zuerst gegeben, so würde man dasselbe immer zu der obigen Figur ergänzen

können, und demnach hat man den Satz: **In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über dem von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Perpendikel an Fläche gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten der Hypotenuse.**

II. Das rechtwinklige Dreieck bietet noch eine zweite Gelegenheit zur Vergleichung der Flächen eines Quadrates und eines Rechteckes. Ist nämlich $ACB$ ein bei $C$ rechtwinkliges Dreieck und $ACDE$ das Quadrat der einen Kathete desselben, mithin $AE \parallel CD$, so kann man aus den Seiten $AB$ und $AE$ leicht auf die Weise ein Parallelogramm konstruieren, dass man $CD$ über $D$ hinaus verlängert und durch $E$ eine Parallele zu $AB$ legt, bis sie jene Verlängerung in $F$ schneidet. Die Parallelogramme $ACDE$ und $ABFE$ besitzen jetzt gleiche Höhen und gleiche Grundlinien ($CD = AE = BF$), mithin ist das Quadrat $ACDE$ an Fläche gleich dem Parallelogramme $ABFE$. — Fällt man weiter von $A$ und $B$ aus auf die (nötigenfalls verlängerte) Gerade $FE$ die Senkrechten $AG$ und $BH$, so haben die Parallelogramme $ABFE$ und $ABHG$ die Gerade $AB$ zur gemeinsamen Grundlinie und ausserdem die nämliche Höhe $AG = BH$, mithin wiederum gleiche Flächen. Es ist also einerseits $ABFE = ACDE$, andererseits $ABFE = ABHG$, mithin das Quadrat $ACDE$ gleich dem Rechtecke $ABHG$. Letzteres hat zur einen Seite $AB$ die Hypotenuse des Dreiecks $ABC$, die andere Seite $BH$ bestimmt sich, wenn man von $C$ auf $AB$ die Senkrechte $CK$ herablässt. Aus ähnlichen Gründen wie in Nr. I ist dann $\angle ACK = \angle CBK$ oder, wenn man für letzteren den korrespondierenden Winkel $BFH$ setzt, $\angle ACK = \angle BFH$, ferner $\angle AKC = \angle BHF = R$, endlich $AC = BF$, weil beide Linien $= AE$ sind. Die Dreiecke $ACK$ und $BFH$ stimmen also in einer Seite und zwei Winkeln überein, sind mithin kongruent und liefern die Beziehung $AK = BH$, welche zeigt, dass die Rechtecksseite $BH$ gleich dem an der Kathete $AC$ liegenden Abschnitte der Hypotenuse ist. Dies giebt den Satz: **Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Senkrechte von der Spitze des**

Fig. 41.

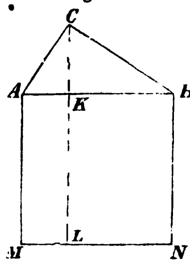


rechten Winkels auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat irgend einer Kathete gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem an jener Kathete liegenden Abschnitte derselben.

Man kann diesen Satz mit Hilfe einer neuen Benennung etwas anders ausdrücken. Lässt man nämlich von den Endpunkten $P$ und $Q$ einer beliebigen geraden oder krummen Linie Senkrechte auf eine Gerade $AB$ herab und bezeichnet die Fusspunkte dieser Senkrechten mit $P'$ und $Q'$, so nennt man nicht selten die Strecke $P'Q'$ die Projektion der Linie $PQ$; der obige Satz lautet dann: Projiziert man die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat irgend einer Kathete gleich dem Rechtecke aus ihrer Projektion und der Hypotenuse.

III. Das vorstehende Theorem führt zu einer bemerkenswerten Folgerung, wenn man dem Rechtecke eine etwas andere Lage giebt. Ist nämlich $ABNM$ das Quadrat der Hypotenuse und $CKL$ die bis zum Durchschnitte mit $MN$ verlängerte Senkrechte, so hat man

Fig. 42.




Quadrat über $AC$ gleich dem Rechteck $AKLM$,
" " $BC$ " " " $BKLN$;

durch Addition ergiebt sich links die Summe der Quadrate über $AC$ und $BC$, rechts das Quadrat $ABNM$, welches jener Summe gleich sein muss; d. h.: In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrate.

Nach seinem Erfinder führt dieses Theorem den Namen des Pythagoräischen Lehrsatzes.*

* Ein sehr anschaulicher Beweis desselben ist folgender. $ABC$ sei das rechtwinklige Dreieck, über dessen Hypotenuse $BC$ das Quadrat $BCDE$ konstruiert ist; klappt man das Dreieck $ABC$ um, so dass es in die Lage $MBC$ kommt, so zerfällt der rechte Winkel $BCD$ in zwei Winkel $BCM$ und $MCD$, wobei $\angle BCM + \angle MCD = R$; ausserdem ist auch $\angle BCM + \angle CBM = R$; durch Vergleichung mit dem vorigen und durch beiderseitige Subtraktion von $\angle BCM$ folgt hieraus, dass $\angle MCD = \angle CBM$ ist. Man gewinnt also Platz, um das Dreieck $ABC$ zum zweiten Male

## § 13.

## Die Verwandlung der Vielecke in andere von gleicher Fläche.

I. Die Sätze der vorigen Paragraphen liefern die Mittel, um Vielecke in andere zu verwandeln, welche dieselben Flächen, aber weniger Seiten besitzen. Ist z. B das Vieleck $ABCDEFG$ gegeben, so schneide man davon mittelst der Diagonale $AF$ ein Dreieck $AFG$ ab und lege durch $G$ eine Parallele zur Diagonale. Verlängert man darauf die Seite $EF$, bis sie jener Parallele in $G'$ begegnet, und zieht $AG'$, so entsteht ein Dreieck $AFG'$, welches dieselbe Fläche wie $AFG$ besitzt. Wenn man nun zu dem übrigen Vielecke $FABCDE$ das Dreieck $AFG'$ hinzusetzt, so ist an die Stelle des weggenommenen Dreieckes ($AFG$) ein gleich grosses getreten, und demnach hat sich die Fläche des ganzen Vieleckes nicht geändert; dagegen enthält das neue Vieleck $ABCDEFG'$ eine

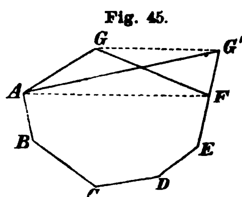


Fig. 45.

---

in das Quadrat $BCDE$ zu legen, und zwar so, dass die Hypotenuse auf $CD$ und die längere Kathete an $CM$ zu liegen kommt und demnach $CDN$ das zweite zu $ABC$ kongruente Dreieck ist. Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt und dass hierbei das Quadrat $BCDE$ in fünf Stücke zerfällt; in die vier zu $ABC$ kongruenten Dreiecke $BCM$, $CDN$, $DEP$, $EBQ$ und in das Quadrat $MNPQ$, dessen Seite nichts anderes als der Unterschied unter den Katheten des ursprünglichen Dreieckes ist (man hat nämlich $MN = CN - CM = AB - AC$, ebenso $NP = DP - DN = AB - AC$ u. s. w.). Diese fünf Bestandteile lassen sich aber auch auf andere Weise anordnen, wenn man nämlich die vier Dreiecke nicht mit den Katheten, wie es hier der Fall ist, sondern mit den Hypotenusen aneinander legt. Dies geschieht auf folgende Weise:

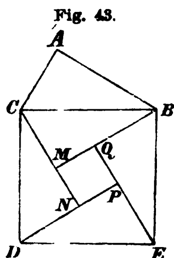


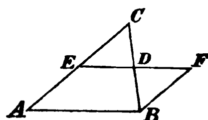
Fig. 43.

Wir stellen in Fig. 44$\beta$ zuerst das Dreieck $BCM$ auf und lehnen daran das zweite Dreieck ($CDN$ in Fig. 44$\alpha$) so, dass die Hypotenusen zusammenfallen und ein Rechteck $BMCF$ entsteht. Daneben legen wir das dritte Dreieck $CGH$ (in Fig. 44$\alpha$ $DEP$) und an dieses das vierte, ähnlich wie vorhin, so dass beide zusammen das Rechteck $CGHI$ ausmachen. In den Winkel $FIH$ bringen wir endlich noch das fünfte Stück (in Fig. 44$\alpha$ $MNPQ$), sodass jetzt ein Sechseck $BMGHLK$ entstanden

Seite weniger als das ursprüngliche, weil $EF$ und $FG'$ in gerader Linie liegen, also nur eine Seite $EG'$ ausmachen. — Dieses Verfahren kann mehrmals nacheinander angewendet werden, um successiv die Seitenzahl des Vieleckes (jedesmal um Eins) zu vermindern; beim Dreieck aber verbietet sich die weitere Anwendung von selbst durch den Umstand, dass das Dreieck keine Diagonalen besitzt. **Jedes Vieleck lässt sich demnach in ein Dreieck von gleicher Fläche verwandeln.**

Ist man auf dem vorigen Wege zu dem Dreiecke $ABC$ gelangt, so kann man dieses noch in ein Parallelogramm umsetzen; halbiert man nämlich eine Seite $BC$ in $D$, zieht durch $D$ eine Parallele zu $AB$ und durch $B$ eine Parallele zu $AC$, welche die erste Parallele in $F$ schneidet, so ist in den Dreiecken $DCE$ und $DBF$ der Konstruction zufolge $BD = CD$, ferner $\angle BDF = \angle CDE$ (Scheitelwinkel) und $\angle DBF = \angle DCE$ (Wechselwinkel). Die Dreiecke

Fig. 46.




---

ist, welches dieselbe Fläche wie das frühere Quadrat $BCDE$ besitzt. Verlängern wir die Gerade $KL$, bis sie $MG$ in $S$ schneidet, so zerfällt jenes Sechseck in zwei Rechtecke $BMSK$ und $SGHL$, über welche

Fig. 44 α.

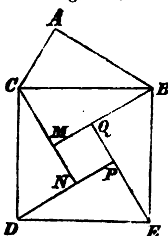
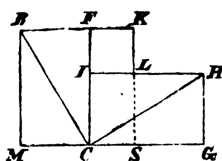



Fig. 44 β.

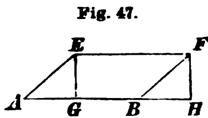



folgendes zu bemerken ist. Es war $IL = CS$ der Unterschied beider Katheten und $CM$ die kleinere Kathete, beides zusammen giebt die grössere Kathete, mithin ist $MS = MB$, folglich das Rechteck $BMSK$ ein Quadrat und zwar das über der grösseren Kathete konstruierte Quadrat; ferner war $CG$ die grössere Kathete, der Unterschied beider Katheten $CS$ davon abgezogen, giebt die kleinere Kathete, mithin ist $SG = GH$, folglich das Rechteck $SGHL$ ein Quadrat und zwar das Quadrat der kleineren Kathete. Die beiden Quadrate $BMSK$ und $SGHL$ füllen zusammen das Sechseck $BMGHLK$ und dieses kommt dem Quadrate $BCDE$ in Fig. 44 α gleich, es ist also in der That das Hypotenusenquadrat aus denselben Stücken zusammengesetzt, wie die Summe der Kathetenquadrate.

*BFD* und *CED* sind demnach kongruent (§ 7), also auch von gleicher Fläche. Schneidet man von dem Dreiecke *ABC* das Dreieck *CDE* ab und setzt statt dessen das gleiche Dreieck *BDF* zu, so ist das entstehende Parallelogramm *ABFE* dem Dreiecke *ABC* an Fläche gleich; man hat daher den Satz: Jedes Vieleck lässt sich in ein Parallelogramm von gleicher Fläche verwandeln.

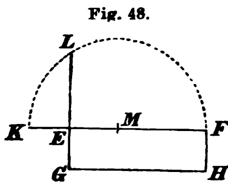
Fällt man von den Punkten *E* und *F* auf die verlängerte *AB* die Senkrechten *EG* und *FH*, so entsteht ein Rechteck *EFHG*, welches dem Parallelogramme *AEFB* an Fläche gleich kommt; d. h.: Jedes Vieleck kann in ein Rechteck von gleicher Fläche verwandelt werden.

Fig. 47.




Um endlich aus diesem Rechtecke ein Quadrat zu machen, benutzen wir den in § 12, I bewiesenen Satz in Verbindung mit der Aufgabe 11 im Anhange zu Kap. II. Es kommt nämlich darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in welchem die Rechtecksseiten *EF* und *EG* als Abschnitte der Hypotenuse erscheinen; das Quadrat des auf die Hypotenuse gefällten Perpendikels ist dann das gesuchte Quadrat. Man erreicht dies leicht, wenn man auf der Verlängerung von *FE* die Strecke *EK* = *EG* nimmt, ferner *GE* verlängert und einen rechten Winkel so legt, dass seine Schenkel durch die Punkte *F* und *K* gehen und seine Spitze auf die Verlängerung von *GE* fällt, wenn man also *FK* in *M* halbiert und mit *MK* als Halbmesser aus *M* einen Kreis beschreibt, welcher die verlängerte *EG* in dem gesuchten Winkelscheitel schneidet. Ist hiermit die Seite *EL* des gesuchten Quadrates bestimmt, so kann man sagen: Jedes Vieleck lässt sich in ein Quadrat von derselben Fläche verwandeln.

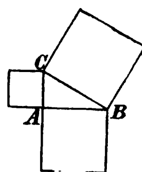
Fig. 48.




II. Wir denken uns jetzt mehrere nebeneinander liegende Vielecke und jedes derselben mittelst der obigen Konstruktionen in ein Quadrat verwandelt; wir haben dann ebenso viel einzelne Quadrate, und es entsteht von selbst die Frage, ob sich diese Flächen nicht zu einem einzigen Quadrate vereinigen lassen.

In der Beantwortung dieser Frage liegt nun die Bedeutung des Pythagoräischen Satzes; sind nämlich zwei Quadrate vorhanden, von denen das eine die Seite $AB$, das andere die Seite $AC$ besitzt, so kann man diese Seiten zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $BAC$ nehmen, und es ist das Quadrat über der Hypotenuse $BC$ gleich der Summe der Quadrate über den Katheten $AB$ und $AC$. Durch mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens ist man im stande, beliebig viele Quadrate zu einem einzigen Quadrate zusammenzuziehen. Mit Rücksicht auf das vorige giebt dies den Satz: Beliebig viel gegebene Vielecke lassen sich jederzeit zu einem Quadrate vereinigen, dessen Fläche die Summe von den Flächen jener Vielecke ausmacht.

Fig. 49.




Der Pythagoräische Satz vermittelt übrigens nicht nur die Addition, sondern auch die Subtraktion der Flächen, sobald letzere auf Quadrate zurückgeführt sind. Das Quadrat irgend einer Kathete ist nämlich der Unterschied zwischen dem Hypotenusenquadrate und dem Quadrate der anderen Kathete; will man also zwei quadratische Flächen voneinander subtrahieren, so braucht man nur ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, welches die Seite des grössern Quadrats zur Hypotenuse und die des kleinern zur Kathete hat; die andere Kathete ist dann die Seite desjenigen Quadrats, dessen Fläche den Unterschied unter den Flächen der gegebenen Quadrate darstellt.

Nicht minder leicht ist die Multiplikation der Quadrate, d. h. die Konstruktion eines Quadrats, dessen Fläche ein Vielfaches, etwa das $n$-fache einer gegebenen Quadratfläche ausmacht. Stellt man nämlich das gegebene Quadrat $n$-mal zwischen zwei Parallelen auf, und rückt diese $n$-Quadrate aneinander, so entsteht zunächst ein Rechteck, welches das gegebene Quadrat $n$-mal enthält. Dieses Rechteck lässt sich wieder in ein Quadrat verwandeln, und letzteres ist das gesuchte Quadrat.

Um endlich die Division der Quadrate auszuführen, d. h. um ein Quadrat zu konstruieren, dessen Fläche der $n^{te}$ Teil einer gegebenen Quadratfläche ist, teilt man zunächst die eine Seite des gegebenen Quadrats in $n$-gleiche Teile und zieht durch alle Teilpunkte Parallelen zur Nebenseite. Das Quadrat

zerfällt jetzt in $n$-kongruente Rechtecke und es ist mithin eine solche Rechteckfläche gleich dem $n^{\text{ten}}$ Teil der Quadratfläche; verwandelt man dieses Rechteck in ein Quadrat, so genügt letzteres den Bedingungen der Aufgabe.

An die hiermit beendigten Vergleichungen und Verwandlung der Flächen geradliniger Vielecke schliesst sich die sogenannte Ausmessung derselben. Dieser muss aber die Ausmessung der Seiten vorangehen, und wir holen daher an dieser Stelle nach, was im Anfange des § 2 übergangen wurde.

## § 14.

## Die Längenvergleichung gerader Linien.

Wenn zwei begrenzte Gerade vorliegen, so können zwei verschiedene Fälle eintreten; entweder ist nämlich die längere von beiden ein Vielfaches der kürzeren oder nicht. Im ersten Falle, wo also, wie man zu sagen pflegt, die kleinere Linie in der grösseren aufgeht, nennt man die erste das genaue Mass der zweiten; wenn dagegen die kleinere Linie in der grösseren nicht aufgeht, so sind zwei Unterfälle möglich; es giebt nämlich entweder eine dritte Linie, welche sowohl in der einen als in der andern aufgeht, oder es existiert keine solche Linie. Bezeichnen wir zwei gegebene Linien kurz mit $a$ und $b$, wobei $a$ die kleinere sein möge, so nennen wir eine dritte Linie $m$, welche in $a$ und $b$ gleichzeitig aufgeht, das gemeinschaftliche Mass von $a$ und $b$ und wir sagen dann von $a$ und $b$: sie sind kommensurabel; dagegen heissen $a$ und $b$ inkommensurabel, wenn sie kein gemeinschaftliches Mass haben.*

Es knüpft sich an diese Erklärungen noch eine einfache Bemerkung. Geht $m$ in $d$ auf, so geht es offenbar auch in $2d$, $3d$, $4d$ u. s. w. auf, d. h.: Das Mass einer Linie ist zugleich ein Mass ihrer Vielfachen. Nehmen wir eine zweite grössere Linie $e$ hinzu, welche ebenfalls $m$ zum Masse hat, so geht nun

---

* Wir sind hier zu den inkommensurabeln Linien durch eine rein logische Unterscheidung gekommen, aus welcher sich nicht beurteilen lässt, ob es dergleichen Linien giebt oder nicht. Dass aber in Wirklichkeit inkommensurable Linien vorkommen, werden wir bald an einem Beispiele zeigen.

$m$ auch in $e \pm d$, $e \pm 2d$, $e \pm 3d$ u. s. w. auf; bezeichnen wir daher mit $\lambda$ eine ganze positive Zahl, so haben wir den Satz: Wenn $m$ ein gemeinschaftliches Mass von $d$ und $e$ ist, so muss es jederzeit in $e \pm \lambda d$ aufgehen.

Sind nun zwei Gerade $a$ und $b$ gegeben, so kommt es vor allem darauf an, zu entscheiden, ob sie ein gemeinschaftliches Mass besitzen oder nicht, ob sie also kommensurabel oder inkommensurabel sind. Hierzu dienen folgende Betrachtungen. Wir nehmen die kleinere der Linien ($a$) so oft von der grösseren ($b$) weg, als es geht, d. h. wir untersuchen, wieviel mal $a$ in $b$ enhalten ist; hierbei wird (wenn nicht $b$ gerade ein Vielfaches von $a$ ausmacht) ein Rest $r$ bleiben, welcher weniger als $a$ beträgt. Nennen wir $\lambda$ die Zahl, welche angiebt, wieviel mal $a$ von $b$ weggenommen wurde, so haben wir die Gleichung $b - \lambda a = r$ oder

$$b = \lambda a + r.$$

Nehmen wir jetzt $r$, welches kleiner als $a$ ist, soviel mal als möglich von $a$ weg, so bleibt im allgemeinen wieder ein Rest, der $r_1$ heissen möge und kleiner als $r$ ist; bezeichnen wir mit $\lambda_1$ die Zahl, welche angiebt, wie oft $r$ von $a$ weggenommen wurde, so ist weiter $a - \lambda_1 r = r_1$ oder

$$a = \lambda_1 r + r_1.$$

Wiederum nehmen wir jetzt $r_1$ so oft als möglich von $r$ weg und kommen so auf einen ferneren Rest $r_2 < r_1$, und wenn jene Wegnahme $\lambda_2$-mal geschah, so ist $r - \lambda_2 r_1 = r_2$, oder

$$r = \lambda_2 r_1 + r_2.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren weiter fortsetzen lässt und dass man damit die folgende Reihe von Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned} b &= \lambda a + r, \\ a &= \lambda_1 r + r_1, \\ r &= \lambda_2 r_1 + r_2, \\ r_1 &= \lambda_3 r_2 + r_3, \\ r_2 &= \lambda_4 r_3 + r_4, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

worin die Grössen $b$, $a$, $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ u. s. w. eine abnehmende Reihe bilden, weil jede derselben kleiner als die vorhergehende und grösser als die nachfolgende ist. — Bei der Ausführung

dieses Verfahrens können nur zwei verschiedene Fälle eintreten: entweder nämlich kommt man einmal auf einen Rest gleich Null, oder die Reste gehen, immer kleiner werdend, ins Unendliche fort, ohne zu Null zu werden (wie z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w.). Diese Fälle bedürfen einer genauen Untersuchung.

I. Wird irgend einer der Reste gleich Null, etwa $r_5$, so erhalten wir eine endliche Reihe von Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned}
b &= \lambda a + r, \\
a &= \lambda_1 r + r_1, \\
r &= \lambda_2 r_1 + r_2, \\
r_1 &= \lambda_3 r_2 + r_3, \\
r_2 &= \lambda_4 r_3 + r_4, \\
r_3 &= \lambda_5 r_4.
\end{aligned}$$

Hier ist nun $r_4$ ein Mass von $r_3$, weil es darin $\lambda_5$-mal enthalten ist, und man kann daher sagen, $r_4$ sei das gemeinschaftliche Mass von $r_4$ und $r_3$. Da $\lambda_4$ eine ganze Zahl bedeutet, so folgt hieraus nach dem früheren Satze, dass $r_4$ in $\lambda_4 r_3 + r_4$, d. h. in $r_2$ aufgeht; weil aber $r_4$ vorhin auch in $r_3$ aufging, so ist jetzt $r_4$ das gemeinschaftliche Mass von $r_3$ und $r_2$. Nach dem schon einmal benutzten Satze geht jetzt $r_4$ auch in $\lambda_3 r_2 + r_3$, d. h. in $r_1$ auf, mithin geht es in $r_2$ und $r_1$ zugleich auf, ist also das gemeinschaftliche Mass von $r_2$ und $r_1$. Eben deswegen geht nun $r_4$ in $\lambda_2 r_1 + r_2$, d. h. in $r$ auf, folglich gleichzeitig in $r_1$ und $r$, und ist daher das gemeinschaftliche Mass von $r_1$ und $r$. Daraus folgt weiter, dass $r_4$ in $\lambda_1 r + r_1$, d. h. in $a$ aufgeht und somit das gemeinschaftliche Mass von $r$ und $a$ ist. Weil endlich $r_4$ in $r$ und $a$ zugleich aufgeht, so geht es auch in $\lambda a + r$, d. h. in $b$ auf und ist folglich das gemeinschaftliche Mass von $b$ und $a$. Der letzte Rest $r_4$ ist also das gemeinschaftliche Mass von $a$ und $b$, und da man auf der Stelle übersieht, dass die obigen Schlüsse in jedem Falle angewendet werden können, wo es überhaupt einen letzten Rest giebt, so haben wir den Satz: Sobald einer der Reste $r$, $r_1$, $r_2$ u. s. w. verschwindet, sind die Linien $a$ und $b$ kommensurabel, und der letzte nicht verschwindende Rest ist ihr gemeinschaftliches Mass.

II. Wenn dagegen keiner der Reste $r$, $r_1$, $r_2$ u. s. w. verschwindet, so sind die vorigen Schlüsse nicht mehr anwendbar, und dies scheint darauf hinzudeuten, dass es in diesem Falle kein gemeinschaftliches Mass für $a$ und $b$ giebt. Um darüber ins klare zu kommen, wollen wir annehmen, es existiere ein solches gemeinschaftliches Mass $m$, und zusehen, was daraus folgt. Stellen wir die vorigen Gleichungen in der nachstehenden Form dar:

$$\begin{aligned} r &= b - \lambda a, \\ r_1 &= a - \lambda_1 r, \\ r_2 &= r - \lambda_2 r_1, \\ r_3 &= r_1 - \lambda_3 r_2 \end{aligned}$$

u. s. f.,

so gelten folgende Schlüsse. Weil $m$ der Voraussetzung nach in $a$ und $b$ aufgeht und $\lambda$ eine ganze Zahl ist, so muss es nach dem früheren auch in $b - \lambda a$, d. h. in $r$, aufgehen und ist folglich zugleich das gemeinschaftliche Mass von $a$ und $r$. Eben deswegen muss $m$ in $a - \lambda_1 r$, d. h. in $r_1$ aufgehen, d. h. das gemeinschaftliche Mass von $r$ und $r_1$ sein. Eine weitere Folge hiervon ist, dass $m$ in $r - \lambda_2 r_1$, d. h. in $r_2$ aufgeht u. s. w. Man übersieht gleich, dass die Fortsetzung dieser Schlussweise zeigt, dass $m$ gleichzeitig in allen Resten $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ u. s. w. aufgehen muss. Diese Reste sind also Vielfache von $m$ und daher können wir, mit $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ u. s. w. ganze positive Zahlen bezeichnend, $r = \mu m$, $r_1 = \mu_1 m$, $r_2 = \mu_2 m$ u. s. w. setzen. Nun bilden aber die Reste $r$, $r_1$, $r_2$ u. s. w. eine abnehmende Reihe, und daher müsste jetzt

$$\mu m > \mu_1 m > \mu_2 m > \mu_3 m \ldots,$$

das heisst

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \ldots$$

sein. Wenn nun eine Reihe ganzer positiver Zahlen, von irgend einer Stelle anfangend, fortwährend abnimmt, so muss notwendig eine von ihnen der Null gleich werden; also gäbe es auch einen Rest $= 0$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass die Reihe der Reste ins Unendliche fortgeht, ohne dass einer verschwindet; es muss daher die Voraussetzung, dass für $a$ und $b$ ein gemeinschaftliches Mass $m$ existiere, falsch gewesen sein, und wir können deshalb behaupten: Wenn keiner der Reste $r$, $r_1$, $r_2$ u. s. w. verschwindet, giebt es

kein gemeinschaftliches Mass für die Linien $a$ und $b$; letztere sind dann inkommensurabel.

Hiermit sind wir also zu einem Kennzeichen gelangt, nach welchem sich in jedem Falle die Kommensurabilität oder Inkommensurabilität zweier Linien sicher entscheiden lässt.

## § 15.

## Das Verhältnis zweier begrenzten Geraden.

I. Hat man von zwei kommensurabeln Geraden $a$ und $b$ das gemeinschaftliche Mass $m$ gefunden, so ist es immer leicht, das numerische Verhältnis derselben anzugeben; nennen wir nämlich $\alpha$ die Zahl, welche angiebt, wie oft $m$ in $a$ enthalten ist, und ebenso $\beta$ die Zahl, welche sagt, wieviel mal $m$ in $b$ steckt, so nennen wir den Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ das Verhältnis der Geraden $a$ und $b$ (indem sich $b$ zu $a$ wie $\beta$ zu $\alpha$ verhält). Die Zahlen $\alpha$ und $\beta$ lassen sich immer ausmitteln, wenn man das gemeinschaftliche Mass $m$ sowohl in $a$ als in $b$ einträgt und zusieht, wie oft das Eintragen möglich ist; man kann aber auch einen etwas anderen Weg einschlagen, welchen man am besten aus einem Beispiele erkennen wird. Es seien $AB$ und $CD$ die gegebenen Geraden $a$ und $b$; man findet dann nach dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Verfahren

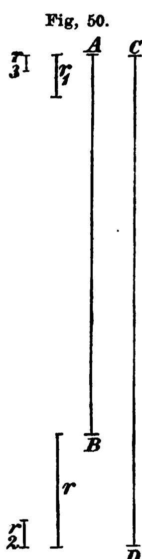


Fig. 50.

$$b = 1a + r,$$
$$a = 3r + r_1,$$
$$r = 2r_1 + r_2,$$
$$r_1 = 1r_2 + r_3,$$
$$r_2 = 2r_3,$$

und da $r_3$ der letzte nicht verschwindende Rest ist, so haben wir hiermit das gemeinschaftliche Mass ($r_3 = m$) von $a$ und $b$ gefunden. Setzen wir statt $r_2$ in der vorletzten Gleichung seinen aus der letzten Gleichung fliessenden Wert $2r_3$, so wird

$$r_1 = 1 . 2r_3 + r_3 = 3r_3,$$

und dies giebt, in die drittletzte Gleichung eingeführt,

$$r = 2 . 3r_3 + 2r_3 = 8r_3.$$

Setzen wir ferner in der zweiten Gleichung für $r$ und $r_1$ ihre Werte, so wird

$$a = 24r_3 + 3r_3 = 27r_3,$$

und jetzt verwandelt sich die erste Gleichung in

$$b = 27r_3 + 8r_3 = 35r_3,$$

sodass also das gemeinschaftliche Mass $r_3$ in $a$ 27 mal und in $b$ 35 mal enthalten ist. Demnach giebt der Bruch $\frac{35}{27}$ das Verhältnis beider Geraden an, oder man hat $b:a = 35:27$. Dass eine solche von der letzten Gleichung an rückwärts schreitende oder aufsteigende Substitution jederzeit möglich ist, wird aus diesem Beispiele hinreichend erhellen.

II. Anders gestaltet sich die Sache in dem Falle, wo $a$ und $b$ inkommensurabel sind, weil hier keine letzte Gleichung existiert und folglich eine von unten nach oben gehende Substitution keinen Anfang fände. Wir wenden dann folgendes Verfahren an. — Von der grösseren Linie $b$ nehmen wir wie vorhin die kleinere $a$ soviel mal als möglich weg, wodurch wir die Gleichung

$$b = \varkappa a + r$$

erhalten, worin $\varkappa$ (wie früher $\lambda$) eine ganze positive Zahl und der Rest $r < a$ ist. Von dem Reste $r$ bilden wir nun ein Vielfaches, am bequemsten das Zehnfache, und tragen $a$ soviel mal als möglich in die neue Linie $10r$ ein; da $a$ und $r$ kein gemeinschaftliches Mass haben, so muss hierbei ein Rest bleiben, und wir erhalten so eine Gleichung von der Form

$$10r = \varkappa_1 a + r_1,$$

wobei $\varkappa_1$ diejenige ganze Zahl bezeichnet, welche angiebt, wie oft sich $a$ von der Linie $10r$ wegnehmen lässt, und der Rest $r_1 < a$ ist. Verfahren wir mit $r_1$ ganz so, wie vorhin mit $r$, so ergiebt sich eine zweite Gleichung von der Form

$$10r_1 = \varkappa_2 a + r_2,$$

worin $r_2$ ebenfalls weniger als $a$ beträgt. Gehen wir auf diese Weise weiter, so gelangen wir zu einer ganzen Reihe solcher Gleichungen, nämlich

$$10r_2 = \varkappa_3 a + r_3,$$
$$10r_3 = \varkappa_4 a + r_4$$

u. s. w.

Lassen wir nun die erste Gleichung ($b = \varkappa a + r$) ungeändert, dividieren dagegen die zweite Gleichung durch 10, die dritte durch $10^2$, die vierte durch $10^3$ u. s. w., so wird

$$b = \varkappa a + r,$$

$$r = \frac{\varkappa_1}{10} a + \frac{r_1}{10},$$

$$\frac{r_1}{10} = \frac{\varkappa_2}{10^2} a + \frac{r_2}{10^2},$$

$$\frac{r_2}{10^2} = \frac{\varkappa_3}{10^3} a + \frac{r_3}{10^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{s-1}}{10^{s-1}} = \frac{\varkappa_s}{10^s} a + \frac{r_s}{10^s},$$

wobei sämtliche bisher erschienenen Reste $r, r_1, r_2 \ldots r_s$ weniger als $a$ betragen.

Durch successive Substitution erhalten wir hieraus die folgende Gleichung:

$$b = \varkappa a + \frac{\varkappa_1}{10} a + \frac{\varkappa_2}{10^2} a + \cdots + \frac{\varkappa_s}{10^s} a + \frac{r_s}{10^s}$$

oder

$$b = \left(\varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \cdots + \frac{\varkappa_s}{10^s}\right) a + \frac{r_s}{10^s}.$$

Lassen wir nun das letzte Glied weg, so ist offenbar

$$b > \left(\varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \cdots + \frac{\varkappa_s}{10^s}\right) a$$

oder

1) $$\frac{b}{a} > \varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \cdots + \frac{\varkappa_s}{10^s};$$

setzen wir dagegen an die Stelle von $r_s$ im letzten Gliede $a$, so haben wir zu viel genommen, weil $r_s < a$ ist und mithin haben wir

$$b < \left(\varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \cdots + \frac{\varkappa_s}{10^s} + \frac{1}{10^s}\right) a$$

oder

$$2)\qquad \frac{b}{a} < x + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_s + 1}{10^s}.$$

Durch die beiden Gleichungen 1) und 2) ist nun das Verhältnis der Linien $b$ und $a$ in zwei Grenzen eingeschlossen, deren Differenz $\frac{1}{10^s}$ beträgt. Daraus folgt auf der Stelle, dass man diese Grenzen einander so nahe bringen kann, als es verlangt wird, wenn man die Zahl $s$ fortwährend zunehmen lässt, d. h., wenn man das beschriebene Verfahren immer weiter fortsetzt. Das genaue Verhältnis selbst ist diejenige Zahl, welcher sich jene Grenzen bei ihrem Zusammenrücken fortwährend nähern; sie existiert aber nur in der Idee und ist die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{b}{a} = x + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \cdots \text{ in inf.}$$

Von zwei inkommensurabeln Grössen lässt sich daher das Verhältnis nicht vollkommen genau, wohl aber mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit angeben. Man nennt ein solches Verhältnis ein irrationales, während ein vollkommen genau angebbares Verhältnis (das der kommensurabeln Linien) ein rationales heisst.

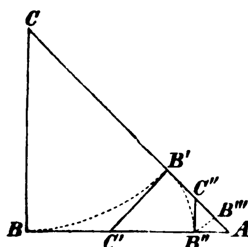
Um diese Lehren auf einen bestimmten Fall anzuwenden, betrachten wir das Verhältnis zwischen der Diagonale und Seite eines Quadrates. Nehmen wir auf der Diagonale $AC$ von $C$ aus den Abschnitt $CB' = CB$, so ist

$$AC = B'C + AB'$$

oder

$$3)\qquad AC = AB + AB'.$$

Fig. 51.




Stellen wir ferner $B'C'$ senkrecht auf $AC$, so ist aus sehr naheliegenden Gründen $AB' = B'C' = C'B$, und wenn wir $C'B'' = C'B'$ nehmen,

$$AB = BC' + C'B'' + AB''$$

oder nach der vorigen Bemerkung

$$4)\qquad AB = 2AB' + AB''.$$

Ziehen wir weiter $B''C''$ senkrecht auf $AB$ und nehmen $C''B''' = C''B''$, so ist $AB'' = B''C'' = B'C'' = C''B'''$ und

$$AB' = B'C'' + C''B''' + AB''',$$

d. i.

5) $$AB' = 2AB'' + AB'''.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Schlüsse; bezeichnen wir, wie folgt:

$$AB = a, \quad AC = b,$$
$$AB' = r, \quad AB'' = r_1, \quad AB''' = r_2 \text{ u. s. w.},$$

so nehmen die Gleichungen 3), 4), 5) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} b &= a + r, \\ a &= 2r + r_1, \\ r &= 2r_1 + r_2, \\ r_1 &= 2r_2 + r_3, \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

und da hier keiner der Reste $r, r_1, r_2, r_3$ u. s. w. verschwindet, so folgt aus ihnen der Satz: Die Diagonale eines Quadrates ist gegen die Seite desselben inkommensurabel.

Um nun das angenäherte Verhältnis beider Linien zu finden, setzen wir wieder

$$b = a + r,$$

nehmen von $r = AB'$ das Zehnfache und tragen $AB$ soviel mal als möglich in $10r$ ein; es findet sich, dass dies vier mal geht, also

$$10r = 4a + r_1$$

ist. Trägt man weiter $a$ in das Zehnfache von $r_1$ ein, so geht dies einmal, also

$$10r_1 = 1a + r_2;$$

weiter ist dann nach demselben Verfahren

$$\begin{aligned} 10r_2 &= 4a + r_3, \\ 10r_3 &= 2a + r_4 \\ &\text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

mithin nach der in diesem Paragraphen auseinandergesetzten Methode

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots,$$

d. h.

$$\frac{b}{a} = 1{,}4142\ldots$$

Bricht man den Decimalbruch ab, so ist $\frac{b}{a} > 1{,}4142$, dagegen $< 1{,}4143$.

Nach den bisherigen Erörterungen hat es keine Schwierigkeit mehr, gerade Linien auszumessen. Bestimmt man nämlich von jeder der gegebenen Geraden das Verhältnis, in welchem sie zu einer willkürlich angenommenen, sich aber immer gleich bleibenden Geraden steht, so dient die letztere als Massstab oder Einheit für die übrigen Linien, und man sagt von diesen, sie seien auf Zahlen gebracht oder in Zahlen gegeben. Diese Verhältniszahlen selbst wollen wir die Längenzahlen der Geraden nennen.

## § 16.

## Die Ausmessung der Flächen geradliniger Figuren.

Das einfachste der Parallelogramme, nämlich das Rechteck, ist bekanntlich durch zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten bestimmt, und mithin muss sich aus diesen zwei Seiten auch seine Fläche nach irgend einer, noch aufzusuchenden Regel herleiten lassen. Wie dies geschieht, zeigen folgende Betrachtungen.

I. Wenn auf der einen Seite $AB$ (der Basis) eines Parallelogrammes $ABCD$ mehrere gleiche Strecken nacheinander aufgetragen sind und durch den Endpunkt jeder Strecke eine Parallele zur Nebenseite $BC$ gelegt wird, so zerfällt das Parallelogramm in ebensoviel kongruente kleinere Parallelogramme, und wenn auf der Grundlinie ein Stück übrig bleibt, kleiner als einer der aufgetragenen Teile, so fällt auch das entsprechende Parallelogramm kleiner aus als die übrigen. Zwei Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$, welche gleiche Winkel ($\angle B = \angle F$), gleiche Nebenseiten ($BC = FG$) und verschiedene Grundlinien ($AB$ und $EF$) besitzen, lassen sich daher ebenso voneinander wegnehmen oder vervielfachen, wie ihre Grundlinien, d. h. man kann auf die Flächen beider Parallelogramme genau dieselben Operationen der Vergleichung (§§ 14 und 15)

Fig. 52.

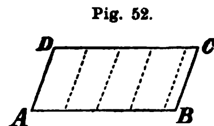
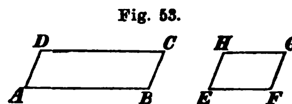



Fig. 53.



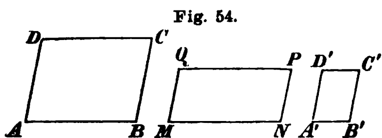
wie auf ihre Grundlinien anwenden, und es muss hierbei die Vergleichung der Flächen dasselbe Verhältnis liefern, wie die Vergleichung der Grundlinien, welches auch sonst dieses Verhältnis sein möge. Findet sich also $EF = \frac{m}{n} AB$, wo $m$ und $n$ irgend welche Zahlen bedeuten, so muss entsprechend $EFGH = \frac{m}{n} ABCD$ sein; hieraus folgt die Proportion

$$ABCD : EFGH = AB : EF,$$

d. h.: Die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme von verschiedenen Grundlinien und gleichen Nebenseiten verhalten sich wie die Grundlinien.

Man kann diesen Satz weiter benutzen, um die Flächen zweier nur in den Winkeln übereinstimmender Parallelogramme auf ein bestimmtes Verhältnis zu bringen. Sind nämlich $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei derartige Parallelogramme, so lässt sich ein drittes Parallelogramm $MNPQ$ konstruieren, welches dieselben Winkel besitzt, dessen eine Seite dem Parallelogramme $ABCD$, dessen andere Seite dem Parallelogramme $A'B'C'D'$ entnommen ist ($MN = AB$, $NP = B'C'$), und welches nun sowohl mit $ABCD$ als mit $A'B'C'D'$ verglichen werden kann. Betrachtet man erstlich $AB$ und $MN$ als gleiche Nebenseiten, $BC$ und $NP$ als verschiedene Grundlinien, so ist

Fig. 54.




$$ABCD : MNPQ = BC : NP;$$

sieht man zweitens $B'C'$ und $NP$ als gleiche Nebenseiten, $A'B'$ und $MN$ als verschiedene Grundlinien an, so ist

$$A'B'C'D' : MNPQ = A'B' : MN;$$

die Zusammenziehung beider Proportionen giebt

$$ABCD : A'B'C'D' = MN . BC : A'B' . NP,$$

oder wegen $MN = AB$, $NP = B'C'$

$$ABCD : A'B'C'D' = AB . BC : A'B' . B'C',$$

d. h.: Die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus den zwei Seiten derselben.

Da die Hälften zweier Grössen in dem nämlichen Verhältnisse zueinander stehen, wie die Grössen selbst, so knüpft sich an den obigen Satz noch die Folgerung: Die Flächen zweier in einem Winkel übereinstimmender Dreiecke verhalten sich wie die Produkte der jenen Winkel einschliessenden Seiten.

II. In gleicher Weise, wie die Ausmessung einer begrenzten Geraden nichts anderes ist als die Bestimmung des Verhältnisses ihrer Länge zur Länge einer unveränderlichen Geraden (der Längeneinheit), verstehen wir unter Ausmessung einer begrenzten Fläche die Ermittelung des Verhältnisses, in welchem ihre Grösse zu der Grösse einer bestimmten Fläche steht; letztere bildet dann den Massstab, nach welchem Flächen gemessen werden. Man bedient sich hierzu des Quadrates der Längeneinheit, die Fläche desselben heisst die Flächeneinheit; die Zahl, welche angiebt, wieviel mal die Flächeneinheit in irgend einer andern Fläche enthalten ist, oder mit anderen Worten, das Verhältnis einer gegebenen Fläche zur Flächeneinheit, nennt man die Flächenzahl jener geschlossenen Figur.

Vergleichen wir zunächst ein beliebiges Rechteck mit der Flächeneinheit, so können wir beide als gleichwinklige Parallelogramme ansehen und haben wie vorhin

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{AB.BC}{A'B'.B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{BC}{B'C'};$$

verstehen wir unter $A'B'C'D'$ das Quadrat der Längeneinheit, so ist der linker Hand vorkommende Quotient das Verhältnis der Rechtecksfläche $ABCD$ zur Flächeneinheit $A'B'C'D'$, also die Flächenzahl des Rechtecks; rechter Hand bedeutet $\frac{AB}{A'B'}$ das Verhältnis der Grundlinie $AB$ des Rechtecks zur Längeneinheit $A'B'$, d. h. die Längenzahl der Grundlinie, und in ganz derselben Weise ist (wegen $B'C' = A'B'$) der Quotient $\frac{BC}{B'C'}$ einerlei mit der Längenzahl der Rechteckshöhe $BC$; alles zusammengenommen giebt den Satz: Die Flächenzahl eines Rechtecks ist das Produkt aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

Sind die Seiten des Rechtecks einander gleich, so haben wir den einfacheren Satz: Die Flächenzahl eines Quadrates ist die zweite Potenz von der Längenzahl seiner Seite.

Da nach § 11 jedes Parallelogramm dieselbe Fläche besitzt wie ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe, so gilt die weitere Regel: Die Flächenzahl eines Parallelogrammes ist das Produkt aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

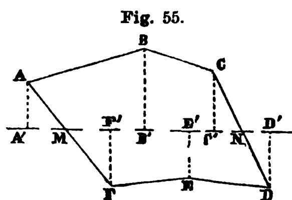
Aus der einfachen Bemerkung, dass jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogrammes angesehen werden darf, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, folgt weiter: Die Flächenzahl eines Dreiecks ist das halbe Produkt aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

Zieht man in einem Trapeze eine Diagonale, so zerfällt dasselbe in zwei Dreiecke, welche die parallelen Seiten des Trapezes zu Grundlinien und die Entfernung der parallelen Seiten zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Berechnet man die Flächen dieser Dreiecke nach der vorigen Regel und vereinigt sie darauf, so gelangt man leicht zu dem Satze: Die Flächenzahl eines Trapezes ist das Produkt aus der halben Summe der parallelen Seiten und der Höhe.

Mit Hilfe dieser Sätze hat es keine Schwierigkeit, die Fläche jeder geradlinigen Figur zu berechnen, indem man letztere durch Diagonalen, welche sich nicht im Innern des Vielecks schneiden dürfen, in Dreiecke zerlegt.

Sehr häufig wird auch die Zerlegung in Dreiecke und Trapeze angewendet, und zwar erreicht man dieselbe dadurch, dass man von allen Endpunkten $A$, $B$, $C$ ... eines gegebenen Vielecks Senkrechte $AA'$, $BB'$, $CC'$ ... auf eine willkürlich gewählte Gerade $MN$ herablässt. Hierdurch wird z. B. das Sechseck $ABCDEF$ zerlegt in

Fig. 55.




das Viereck $ABB'M$ = Trapez $ABB'A'$ — Dreieck $AA'M$,
das Trapez $BCC'B'$,
das Dreieck $CC'N$,

das Viereck $DEE'N$ = Trapez $DEE'D'$ − Dreieck $DD'N$,
das Trapez $EFF'E'$,
das Dreieck $FF'M$,

und daher ist seine Fläche:

$$\frac{AA'+BB'}{2}\cdot A'B' - \frac{AA'.A'M}{2} + \frac{BB'+CC'}{2}\cdot B'C' + \frac{CC'.C'N}{2}$$
$$+\frac{DD'+EE'}{2}\cdot D'E' - \frac{DD'.D'N}{2} + \frac{EE'+FF'}{2}\cdot E'F' + \frac{FF'.F'M}{2},$$

wobei die Längenzahlen der einzelnen Strecken ebenso bezeichnet worden sind, wie letztere selbst. Die Rechnung vereinfacht sich etwas, wenn man die Gerade $MN$ so legt, dass sie zwei gegenüberliegende Ecken (hier $A$ und $D$) verbindet.

Im Fall die Gerade $MN$ ausserhalb des Vielecks liegt, tritt eine kleine Modifikation ein, die man leicht finden wird.

## § 17.

## Zahlenverhältnisse zwischen den wichtigsten Linien des Dreiecks.

I. Man kann von den im vorigen Paragraphen entwickelten Lehren noch einen anderweiten Gebrauch machen, wenn man sich erinnert, dass wir in § 12 Beziehungen zwischen verschiedenen Flächen kennen gelernt haben; diese geometrischen Beziehungen müssen sich nämlich in arithmetische verwandeln, sobald man die betreffenden Flächen in Zahlen ausdrückt. Setzen wir, um dies gleich bestimmter nachzuweisen, in einem rechtwinkligen Dreiecke $ABC$ die Hypotenuse $BC = a$, ferner die Katheten $AC = b$, $AB = c$, wo nun $a$, $b$, $c$ die Längenzahlen der betreffenden Geraden bezeichnen, so verwandelt sich der Pythagoräische Satz in die arithmetische Formel

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

nach welcher es möglich ist, aus zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte Seite zu berechnen. Sind nämlich die Katheten $b$ und $c$ gegeben, so findet sich $a$ mittelst der Formel

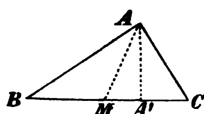
1) $$a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

ist dagegen die Hypotenuse $a$ und die eine Kathete $b$ gegeben, so folgt

2) $$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Nennen wir ferner $\alpha$ die Längenzahl der Senkrechten $AA'$ und setzen die Abschnitte $A'B = a_1$ und $A'C = a_2$, so liefert der in § 12 bewiesene Satz die Gleichung

Fig. 56.




$$\alpha^2 = a_1 a_2;$$

hieraus folgt die Formel

3) $$\alpha = \sqrt{a_1 a_2},$$

welche dazu dienen kann, um $\alpha$ aus $a_1$ und $a_2$ zu berechnen.

II. Wir denken uns jetzt unter $ABC$ ein beliebiges Dreieck, dessen längste Seite $BC = a$ sein möge, setzen wie vorhin $AC = b$, $AB = c$, $AA' = \alpha$, halbieren ferner die Basis $BC$ in $M$ und bezeichen die Längenzahlen von $AM$ und $MA'$ mit $m$ und $d$; es gelten dann folgende Anwendungen des Pythagoräischen Satzes

im Dreieck $AA'B$, $(\frac{1}{2}a + d)^2 + \alpha^2 = c^2$,
" " $AA'M$ $d^2 + \alpha^2 = m^2$;

daraus folgt durch Subtraktion

4) $$(\tfrac{1}{2}a)^2 + ad = c^2 - m^2.$$

In ähnlicher Weise hat man

im Dreieck $AA'C$, $(\frac{1}{2}a - d)^2 + \alpha^2 = b^2$,
" " $AA'M$ $d^2 + \alpha^2 = m^2$

durch Subtraktion

5) $$(\tfrac{1}{2}a)^2 - ad = b^2 - m^2.$$

Durch Addition der Gleichungen 4) und 5) ergiebt sich

$$2(\tfrac{1}{2}a)^2 = b^2 + c^2 - 2m^2$$

oder

6) $$(\tfrac{1}{2}a)^2 + m^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2),$$

was sich leicht in Worte fassen lässt, wenn man $m$ die Mittellinie, $b$ und $c$ ihre einschliessenden Seiten nennt. Für die Länge der Mittellinie findet man

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

auf ähnliche Weise kann man die übrigen Mittellinien des Dreiecks berechnen.

III. Ausser den Mittellinien sind noch die Höhen des Dreiecks von Interesse, zu deren Bestimmung man wiederum mittelst der Dreiecke $AA'B$ und $AA'C$ gelangt, in welchen wir die Abschnitte $A'B = \frac{1}{2}a + d$ und $A'C = \frac{1}{2}a - d$ durch $a_1$ und $a_2$ bezeichnen wollen. Die vorhin schon erwähnten Beziehungen lauten dann

7) $$\begin{cases} (a_1)^2 + \alpha^2 = c^2, \\ (a_2)^2 + \alpha^2 = b^2, \end{cases}$$

und aus ihnen folgt durch Subtraktion

$$(a_1)^2 - (a_2)^2 = c^2 - b^2.$$

Dividiert man diese Gleichung durch

8) $$a_1 + a_2 = a,$$

so erhält man die Gleichung

9) $$a_1 - a_2 = \frac{c^2 - b^2}{a},$$

welche in Verbindung mit 8) zur Berechnung der Abschnitte $a_1$ und $a_2$ benutzt werden kann. Die halbe Summe der Gleichungen 8) und 9) ist nämlich

10) $$a_1 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

und die halbe Differenz

11) $$a_2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Mit Hilfe von einer der Gleichungen 7) lässt sich nun auch die Höhe $\alpha$ berechnen, wenn man z. B. der zweiten Formel die Gestalt

12) $$\alpha^2 = b^2 - (a_2)^2 = (b + a_2)(b - a_2)$$

giebt und darauf den Wert von $a_2$ aus 11) substituiert. Man hat so

$$b + a_2 = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$
$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a};$$

ferner

$$b - a_2 = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$
$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}$$

und folglich, wenn man die Werte von $b + a_2$ und $b - a_2$ in die Formel 12) substituiert,

$$\alpha^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2}$$

oder besser geordnet

$$13)\quad \alpha^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}.$$

Man kann diesem Ausdrucke eine elegantere Form erteilen, wenn man

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$$

setzt, wo $s$ den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet. Es ist dann

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s &&= 2.s, \\ -a+b+c &= 2s-2a &&= 2.(s-a), \\ a-b+c &= 2s-2b &&= 2.(s-b), \\ a+b-c &= 2s-2c &&= 2.(s-c), \end{aligned}$$

und wenn man dies in Nr. 13 substituiert, so wird

$$\alpha^2 = \frac{4}{a^2}\cdot s(s-a)(s-b)(s-c)$$

und mithin durch Wurzelausziehung

$$14)\qquad \alpha = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bezeichnen wir noch die Flächenzahl des Dreiecks mit $F$, so ist $F = \frac{a\alpha}{2}$, mithin vermöge des Wertes von $\alpha$

$$15)\qquad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

nach welcher Formel sich also die Fläche des Dreiecks aus seinen drei gegebenen Seiten berechnen lässt. Ein Beispiel hierzu bieten die Werte $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, woraus man findet:

$$\alpha = \frac{2.84}{13},\quad \beta = \frac{2.84}{14},\quad \gamma = \frac{2.84}{15},\quad F = 84.$$

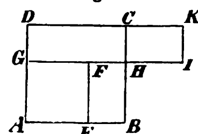
IV. So wie wir hier geometrische Beziehungen (zwischen Flächen) in arithmetische Beziehungen verwandelt haben, können wir auch umgekehrt arithmetische Theoreme, sozusagen ins Geometrische übersetzen, wenn in jenen Theoremen nur Produkte aus zwei Faktoren vorkommen. Das Mittel zu einer

derartigen Übertragung besteht in der einfachen Bemerkung, dass jedes Produkt aus zwei Zahlen $g$ und $h$ als die Flächenzahl eines Rechtecks angesehen werden darf, dessen Seiten durch die Längenzahlen $g$ und $h$ gemessen sind und folglich mittelst einer willkürlichen Längeneinheit konstruiert werden können. Als Beispiel für eine derartige Übertragung wählen wir die bekannte arithmetische Formel

16) $$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Denken wir uns $a$ als die Längenzahl einer Geraden $AB$, so ist $a^2$ die Flächenzahl des über ihr konstruierten Quadrates $ABCD$; verstehen wir unter $b$ ähnlich die Längenzahl von $AE$, so ist $b^2$ die Flächenzahl des Quadrates $AEFG$; die Differenz $a^2 - b^2$ bedeutet folglich die Flächenzahl des Sechsecks $EBCDGF$. Ziehen wir aber $FH$ parallel zu $EB$, so zerfällt dieses Sechseck in die beiden Rechtecke $CDGH$ und $EBHF$, von denen wir das zweite in die Lage $CHIK$ bringen können, weil $CH = FH$ ist. Hierdurch entsteht das neue Rechteck $DGIK$, welches $GI = GH + HI = AB + AE = a + b$ zur Grundlinie und $GD = AD - AG = a - b$ zur Höhe hat und dessen Fläche demnach $GI.GD = (a + b)(a - b)$ ist, wie es zufolge der Gleichung 16) sein muss. Man konnte daher die letztere gleich unmittelbar geometrisch deuten, wenn man sagte: Die Differenz zweier Quadrate ist an Fläche einem Rechtecke gleich, welches die Summe von den Seiten jener Quadrate zur Grundlinie und ihre Differenz zur Höhe hat.

Fig 57.




Ähnliche Beispiele für solche Übertragungen liefern die bekannten Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

## Kap. IV.

# Die Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

---

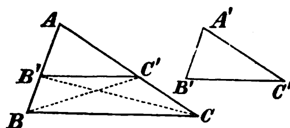
### § 18.

### Die Ähnlichkeit der Dreiecke.

An jeder geometrischen Figur lassen sich im allgemeinen zwei Merkmale unterscheiden, nämlich die Grösse und die Gestalt; es kann daher eine dreifache Vergleichung der Figuren stattfinden, wenn man nämlich entweder eine gleichzeitige Übereinstimmung in Grösse und Gestalt verlangt (Kongruenz Kap. I), oder nur Gleichheit der Grösse ohne Rücksicht auf die Gestalt (Flächenvergleichung Kap. II), oder endlich gleiche Gestalt ohne Rücksicht auf die Grösse. Diese letzte Beziehung zwischen geradlinigen Figuren ist es, mit welcher wir uns hier beschäftigen; sie führt den Namen Ähnlichkeit.

I. Bleiben wir wieder bei der einfachsten geradlinigen Figur, dem Dreiecke, stehen, so können wir leicht die Bedingung ermitteln, unter welcher zwei Dreiecke für ähnliche zu halten sind. Es ist dies nämlich dann der Fall, wenn die gegenseitige Lage der Seiten in beiden Dreiecken dieselbe ist, d. h. wenn die Winkel des einen Dreiecks der Reihe nach den Winkeln des anderen gleich sind. Wir sagen daher: Zwei Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ heissen ähnlich, sobald $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, mithin auch $\angle C = \angle C'$ ist und bezeichnen dies durch $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. — Legt man den Winkelscheitel $A'$ so, dass zugleich die Schenkel $A'B'$ und $A'C'$ in die Richtungen von $AB$ und $AC$ fallen, so wird $B'C'$ parallel zu $BC$, weil hier gleiche korrespondierende Winkel vorhanden sind; man kann daher ähnliche Dreiecke jederzeit in eine solche Lage bringen, dass zwei Seiten des einen auf zwei Seiten des anderen fallen und die übrig bleibenden Seiten parallel laufen.

Fig. 58.



Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass sie ähnlich sein müssen, wenn ihnen diese Eigenschaft zukommt.

Um eine Beziehung zwischen den Seiten ähnlicher Dreiecke zu finden, ziehen wir die Geraden $BC'$, $CB'$ und wenden auf die Dreiecke $ABC'$ und $ACB'$, welche den Winkel bei $A$ gemein haben, den in § 16, I bewiesenen Dreiecksatz an; wir erhalten so

$$\frac{\triangle\, ABC'}{\triangle\, ACB'} = \frac{AB\,.\,AC'}{AC\,.\,AB'}.$$

Jedes der linker Hand vorkommenden Dreiecke besteht aus zwei Stücken:

$$\triangle\, ABC' = \triangle\, AB'C' + \triangle\, B'C'B,$$
$$\triangle\, ACB' = \triangle\, AB'C' + \triangle\, C'B'C,$$

und diese Stücke sind in beiden Fällen von gleicher Grösse, nämlich $AB'C'$ sich selbst gleich und $\triangle\, B'C'B = \triangle\, C'B'C$, weil diese Dreiecke die Gerade $B'C'$ zur gemeinschaftlichen Grundlinie haben und ihre Spitzen $B$ und $C$ auf einer Parallelen zur Grundlinie $B'C'$ liegen. Aus der Gleichheit der einzelnen Bestandteile folgt nun die Gleichheit der ganzen Flächen $ABC'$ und $ACB'$, die obige Beziehung wird daher einfacher:

$$1 = \frac{AB\,.\,AC'}{AC\,.\,AB'} \text{ oder } AB\,.\,AC' = AC\,.\,AB';$$

statt dieser Gleichung kann man auch die Proportion

$$AB : AC = AB' : AC'$$

schreiben, oder wegen $AB' = A'B'$ und $AC' = A'C'$

$$AB : AC = A'B' : A'C'.$$

Legt man die ähnlichen Dreiecke mit den gleichen Winkeln $B$ und $B'$ oder $C$ und $C'$ in eben der Weise aufeinander, wie es vorhin mit den Winkeln $A$ und $A'$ geschah, so gelangt man durch ganz ähnliche Schlüsse zu den entsprechenden Proportionen

$$BC : BA = B'C' : B'A'$$

und

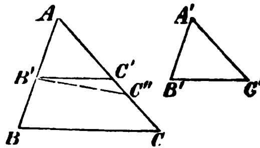
$$CA : CB = C'A' : C'B',$$

d. h.: In ähnlichen Dreiecken stehen ähnlich liegende Seiten in gleichen Verhältnissen zueinander.

II. Man kann den bemerkenswerten Satz, zu dem wir soeben gelangt sind, auch umkehren und auf die Ähnlichkeit

der Dreiecke zurückschliessen, indem man voraussetzt, dass in den Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$ ein gleicher Winkel $A = A'$ vorkommt und ausserdem die ihn einschliessenden Seiten proportional sind. Legt man nämlich die Dreiecke mit dem gleichen Winkel $A = A'$ so aufeinander, dass $A'B'$ in $AB$ und $A'C'$ in $AC$ fällt, so ist die Gerade $B'C'$ entweder parallel zu $BC$ oder nicht. Wäre nun das letztere der Fall, so ziehe man durch $B'$ eine Parallele $B'C''$ zu $BC$, so ist $\triangle AB'C'' \sim \triangle ABC$ und mithin

Fig. 59.




$$AB:AC = AB':AC''.$$

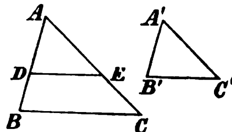
Diese Proportion verträgt sich aber mit der Voraussetzung

$$AB:AC = AB':AC'$$

solange nicht, als $AC''$ von $AC'$ verschieden ist, und daher muss $AC'' = AC'$, d. h. $BC''$ einerlei mit $BC'$, d. h. parallel zu $BC$ und mithin $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ sein. Dies giebt den Satz: Wenn in zwei Dreiecken ein gleicher Winkel vorkommt und die ihn einschliessenden Seiten in gleichem Verhältnisse stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.

III. Haben zwei Dreiecke einen gleichen Winkel $B = B'$, welcher aber von den proportionalen Seiten nicht eingeschlossen wird, so mache man $AD = A'B'$ und $\angle ADE = \angle A'B'C' = \angle ABC$, so läuft $DE$ parallel zu $BC$, mithin ist $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ und

Fig. 60.




$$AB:AC = AD:AE,$$

d. i.

$$AB:AC = A'B':AE.$$

Aus der Vergleichung dieser Proportion mit der Voraussetzung

$$AB:AC = A'B':A'C'$$

folgt nun augenblicklich $AE = A'C'$; die Dreiecke $ADE$ und $A'B'C'$ stimmen also in zwei Seiten und einem Gegenwinkel überein und sind demnach kongruent, wenn jene Stücke zur Bestimmung des Dreiecks hinreichen. Aus $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ folgt dann, indem für $\triangle ADE$ das kongruente $\triangle A'B'C'$ gesetzt wird, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, d. h.: Wenn in zwei Dreiecken ein gleicher Winkel vorkommt und zwei ihn nicht einschliessende Seiten in gleichem Verhältnisse

stehen, so sind die Dreiecke ähnlich, vorausgesetzt, dass jene drei Stücke zur Dreieckbestimmung hinreichen.

IV. Sind in zwei Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$ zwei Seitenverhältnisse gleich, also

$$AB : AC = A'B' : A'C'$$

und

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

so mache man wie vorhin $AD = A'B'$ und ziehe $DE$ parallel zu $BC$; die Dreiecke $ABC$ und $ADE$ sind dann ähnlich und es gelten nach Nr. I in ihnen folgende Proportionen:

$$AB : AC = AD : AE,$$
$$AB : BC = AD : DE,$$

d. i. wegen $AD = A'B'$

$$AB : AC = A'B' : AE,$$
$$AB : BC = A'B' : DE.$$

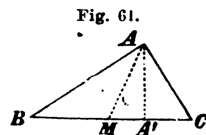
Aus der Vergleichung derselben mit den oben vorausgesetzten Proportionen folgt augenblicklich $AE = A'C'$ und $DE = B'C'$, so dass also die Dreiecke $ADE$ und $A'B'C'$ wegen ihrer Übereinstimmung in den Seiten kongruent sind. So wie nun vorher $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ war, muss nun jetzt $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ sein, d. h.: Wenn in einem Dreiecke zwei Seitenverhältnisse so gross sind wie in einem anderen, so sind beide Dreiecke ähnlich.

## § 19.

## Anwendung auf das rechtwinklige Dreieck.

Lässt man in einem rechtwinkligen Dreiecke $ABC$ von der Spitze $A$ des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse herabsteigen, so zerfällt das Urdreieck in zwei andere rechtwinklige Dreiecke, deren Winkel leicht zu bestimmen sind. Da nämlich in jedem rechtwinkligen Dreiecke die beiden spitzen Winkel zusammen einen Rechten ausmachen, so ist

Fig. 61.




$$\angle B + \angle C = R \text{ und } \angle CAA' + \angle C = R,$$

folglich

$$\angle B = \angle CAA';$$

ferner

$$\angle C + \angle B = R \text{ und } \angle BAA' + \angle B = R,$$

mithin

$$\angle C = \angle BAA'.$$

Es folgt hieraus, dass die Dreiecke $A'BA$, $A'AC$ und $ABC$ gleiche Winkel besitzen und mithin einander ähnlich sind.

Vergleichen wir nun zunächst die beiden kleineren Dreiecke unter sich, so folgt wegen $\triangle A'BA \sim \triangle A'AC$

$$A'B : A'A = A'A : A'C$$

und vermöge der Gleichheit der Produkte aus den inneren und äusseren Gliedern einer geometrischen Proportion

$$\overline{A'A}^2 = A'B \,.\, A'C.$$

Bezeichnen wir die Längenzahlen von $A'A$, $A'B$ und $A'C$ der Reihe nach mit $\alpha$, $a_1$, $a_2$, so ist das so gewonnene Resultat

1) $$\alpha^2 = a_1 a_2$$

einerlei mit dem in § 12, I auf anderem Wege gefundenen.

Vergleichen wir weiter die Dreiecke $A'BA$ und $A'AC$ mit dem ganzen Dreiecke $ABC$, so ist wegen $\triangle A'BA \sim \triangle ABC$

$$A'B : BA = AB : BC$$

oder

$$\overline{AB}^2 = A'B \,.\, BC;$$

ferner, wegen $\triangle A'AC \sim \triangle ABC$, ist

$$A'C : CA = AC : CB$$

oder

$$\overline{AC}^2 = A'C \,.\, BC.$$

Bezeichnen wir die Längenzahlen von $BC$, $AC$, $AB$ der Reihe nach mit $a$, $b$, $c$, so nehmen die gefundenen Gleichungen die Form an:

2) $$c^2 = a_1 a,$$

3) $$b^2 = a_2 a$$

und drücken in Zeichen den Satz aus, den wir in § 13, II kennen gelernt haben. Durch Addition der Gleichungen 2) und 3) ergiebt sich noch

$$b^2 + c^2 = (a_2 + a_1)\, a,$$

oder, wenn man die Gleichung $a_2 + a_1 = a$ berücksichtigt,

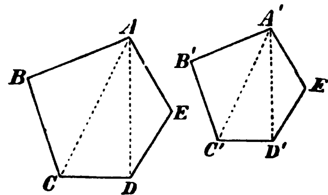
4) $$b^2 + c^2 = a^2,$$

was nichts anderes als der Pythagoräische Lehrsatz ist.

## § 20.
## Die Ähnlichkeit der Vielecke.

Es hat nicht die mindeste Schwierigkeit, den Begriff der Ähnlichkeit, den wir in § 18 für Dreiecke kennen gelernt haben, auf beliebige Vielecke auszudehnen, indem man sich letztere durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt denkt. Sind nämlich zwei Vielecke durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke geteilt und diese einzelnen Dreiecke einander ähnlich, so sind offenbar auch die ganzen Vielecke von gleicher Gestalt; wir stellen daher die Definition auf: Vielecke heissen ähnlich, wenn sie aus gleichviel ähnlichen Dreiecken, in derselben Reihenfolge genommen, so zusammengesetzt sind, dass jedes Dreieck mit dem nächstfolgenden eine Seite gemein hat. So sind z. B. die Fünfecke $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ ähnlich, wenn jedes aus drei Dreiecken, $ABC$ $ACD$, $ADE$ einerseits und $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$ andererseits, zusammengesetzt ist, welche, in derselben Reihenfolge genommen, einander ähnlich sind, nämlich $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$, und so liegen, dass jedes mit dem nächstfolgenden eine Seite gemein hat.

Fig. 62.




Berücksichtigt man, dass aus dieser Definition folgt:

$$\angle BCA = \angle B'C'A',$$
$$\angle ACD = \angle A'C'D',$$
$$\angle CDA = \angle C'D'A',$$
$$\angle ADE = \angle A'D'E'$$

u. s. w.,

mithin durch Addition zweier aufeinander folgender Gleichungen

$$\angle BCD = \angle B'C'D', \quad \angle CDE = \angle C'D'E'$$

u. s. w.,

so hat man den Satz: In ähnlichen Vielecken sind die ähnlich liegenden Winkel einander gleich.

Wenden wir auf die einzelnen Bestandteile zweier ähnlichen Vielecke die Sätze des § 18 an, so ist wegen $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$1) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ oder } AB : BC = A'B' : B'C'$$

ferner

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'},$$

und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $ACD$ und $A'C'D'$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{A'C'}{C'D'},$$

mithin durch Multiplikation der beiden letzten Gleichungen

$$2) \qquad \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ oder } AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Ferner hat man wieder

$$\frac{CD}{DA} = \frac{C'D'}{D'A'}$$

und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $DEA$ und $D'E'A'$

$$\frac{DA}{DE} = \frac{D'A'}{D'E'},$$

mithin durch Multiplikation

$$\frac{CD}{DE} = \frac{C'D'}{D'E'}.$$

Multipliziert man noch mit der Gleichung 2), so wird weiter

$$3) \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{A'B'}{D'E'} \text{ oder } AB : DE = A'B' : D'E'.$$

Man übersieht sogleich den Fortgang dieser Schlüsse, welche zu dem allgemeinen Satze führen: In ähnlichen Vielecken stehen ähnlich liegende Seiten in gleichen Verhältnissen.

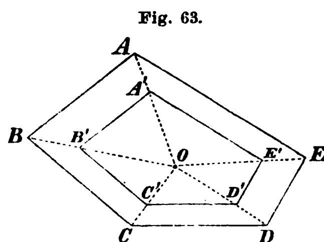
Man kann diese Sätze zusammen umkehren und auch sagen: Zwei Vielecke, in denen ähnlich liegende Winkel einander gleich sind und sämtliche ähnlich liegende Seiten in gleichen Verhältnissen stehen, sind einander ähn-

lich; denn man wird sich ohne Mühe überzeugen, dass jetzt die einzelnen, durch ähnlich liegende Diagonalen entstehenden Dreiecke samt und sonders einander ähnlich werden, woraus die Ähnlichkeit der ganzen Vielecke unmittelbar folgt. Zu bemerken ist jedoch, dass zur Ähnlichkeit zweier Vielecke nicht sämtliche ebengenannte Beziehungen notwendig erfordert werden und zwar ebenso wenig als zur Kongruenz zweier Vielecke die Gleichheit aller Seiten und Winkel notwendig vorausgesetzt werden musste. Es reicht nämlich eine geringere Anzahl von jenen Beziehungen zur Ähnlichkeit hin. Bleiben wir zuerst bei dem Dreiecke stehen, so finden wir nach § 18, dass zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie entweder in zwei Winkeln, oder in einem Winkel und einem Seitenverhältnisse, oder in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen, dass also zur Ähnlichkeit zweier Dreiecke nur zwei Gleichungen erfordert werden, letztere mögen sich nun auf Winkel, oder auf Seitenverhältnisse, oder auf beide beziehen. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Ähnlichkeit zweier Vierecke durch vier Gleichungen bestimmt wird, die zweier Fünfecke durch sechs Gleichungen u. s. w. Dies giebt den Satz: Zur Ähnlichkeit zweier $n$-Ecke gehören $2n - 4$ Gleichungen, die sich entweder auf Winkel, oder auf Seitenverhältnisse, oder teils auf die einen und teils auf die anderen beziehen. Die Ähnlichkeit der Vielecke bedarf also einer Gleichung weniger als die Kongruenz derselben und sie geht in die letztere über, sobald noch die unmittelbare Gleichheit zweier ähnlich liegenden Diagonalen oder Seiten hinzutritt. Man könnte daher auch den Satz aufstellen: Findet zwischen zwei Vielecken eine solche Beziehung statt, dass sie durch Gleichheit zweier entsprechend liegenden Linien kongruent werden würden, so sind die Vielecke ähnlich.

Es hat nach diesen Erörterungen keine Schwierigkeit, zu einem gegebenen Vielecke ein ihm ähnliches zu konstruieren. Ist z. B. das Fünfeck $ABCDE$ gegeben, so ziehe man die Diagonalen $AC$, $AD$ und lege nun an eine willkürliche Gerade $A'B'$ die Winkel $B'A'C' = \angle BAC$ und $\angle A'B'C' = \angle ABC$ an, so entsteht zunächst das Dreieck $A'B'C'$, welches dem Dreiecke $ABC$ ähnlich ist. Wiederholt man dieses Verfahren,

indem man $\angle C'A'D' = \angle CAD$ und $\angle A'C'D' = \angle ACD$ macht, so erhält man das zweite Dreieck $A'C'D' \sim ACD$; wie man auf diese Weise weiter gehen kann, ist ohne weiteres klar. Es giebt aber noch einen anderen Weg. Nimmt man innerhalb des gegebenen Vielecks $ABCDE$ einen beliebigen Punkt $O$ an, verbindet diesen mit den Ecken durch Gerade ($OA$, $OB$, $OC$, $OD$, $OE$) und zieht nun, von einem willkürlichen Punkte $A'$ der Geraden $OA$ ausgehend, die Geraden $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'E' \parallel DE$ und verbindet endlich $E'$ und $A'$ durch eine Gerade $E'A'$, so erhält man gleichfalls ein Vieleck $A'B'C'D'E'$, welches dem gegebenen Vielecke $ABCDE$ ähnlich ist, wie man aus der Gleichheit aller Winkel und der Proportionalität der Seiten sogleich erkennen wird. Den willkürlichen Punkt $O$ nennt man gewöhnlich den **Ähnlichkeitspunkt** der beiden Vielecke.

Fig. 63.




## § 21.

## Die Flächen ähnlicher Vielecke.

I. Fangen wir wieder beim einfachsten Vielecke, dem Dreiecke, an und bezeichnen die Längenzahlen der Geraden und die Flächenzahlen der Dreiecke wie die Geraden und die Dreiecke selbst, so ist, wenn $CD$ und $C'D'$ die Höhen der Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ sind,

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB . CD, \quad \triangle A'B'C' = \tfrac{1}{2} A'B' . C'D',$$

folglich durch Division

$$1) \qquad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'BC'} = \frac{AB . CD}{A'B' . C'D'}.$$

Sind nun die in Rede stehenden Dreiecke ähnlich, so sind es auch die Dreiecke $ACD$ und $A'C'D'$, $BCD$ und $B'C'D'$, folglich

$$\frac{AD}{CD} = \frac{A'D'}{C'D'}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{B'D'}{C'D'}$$

und durch Addition beider Gleichungen

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

oder

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Multipliziert man beiderseits mit $\frac{AB}{A'B'}$, so wird hieraus

$$2) \qquad \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'};$$

multipliziert man aber beiderseits mit $\frac{CD}{C'D'}$, so erhält man

$$3) \qquad \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2$$

und durch Vergleichung beider Resultate

$$4) \qquad \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks nimmt die Gleichung 1) die folgende Form an:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2,$$

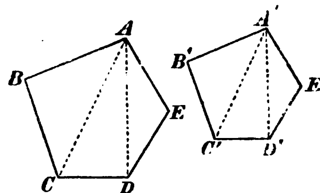
oder in Form einer Proportion geschrieben

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2,$$

d. h.: Die Flächenzahlen zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Längenzahlen zweier ähnlich liegenden Seiten, ingleichen wie die Quadrate der Längenzahlen ihrer Höhen.

II. Hat man allgemeiner zwei ähnliche Vielecke $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$

Fig. 64.




so ist nach dem vorigen Satze

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2,$$
$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2,$$
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \left(\frac{DE}{D'E'}\right)^2$$
u. s. f.

Wegen der Ähnlichkeit sämtlicher einzelnen Dreiecke hat man weiter
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \cdots = \frac{AB}{A'B'},$$
mithin sind die rechten Seiten der vorhergehenden Gleichungen einander gleich und
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \cdots = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2.$$

Nach dem bekannten arithmetischen Satze, dass aus den Gleichungen
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \cdots = \mu$$
jederzeit folgt*
$$\frac{b + c + d + \cdots}{b' + c' + d' + \cdots} = \mu,$$
erhält man aus den vorigen Gleichungen
$$\frac{\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \cdots}{\triangle A'B'C' + \triangle A'C'D' + \triangle A'D'E' + \cdots} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2,$$
d. i.
$$\frac{\text{Vieleck } ABCDE\ldots}{\text{Vieleck } A'B'C'D'E'\ldots} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2,$$
oder in Form einer Proportion ausgesprochen: Die Flächenzahlen zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich wie

* Wegen $\frac{b}{b'} = \mu$, $\frac{c}{c'} = \mu$, $\frac{d}{d'} = \mu$ u. s. w. ist nämlich
$$b = b'\mu, \quad c = c'\mu, \quad d = d'\mu \ldots,$$
folglich durch Addition
$$b + c + d + \cdots = (b' + c' + d' \ldots)\mu$$
und durch Division
$$\frac{b + c + d + \cdots}{b' + c' + d' + \cdots} = \mu.$$

die Quadrate der Längenzahlen zweier ähnlich liegenden Seiten.

III. Dieses Theorem lässt noch eine Kombination mit dem Pythagoräischen Satze zu. Denken wir uns nämlich über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren so konstruiert, dass die Dreiecksseiten ähnlich liegende Seiten dieser Figuren sind, und nennen wir $a$ die Längenzahl der Hypotenuse, $b$ und $c$ die Längenzahlen der Katheten, ferner $A$ die Flächenzahl der über der Hypotenuse stehenden Figur, $B$ und $C$ die Flächenzahlen der über den Katheten gezeichneten Figuren, so ist

$$\frac{B}{A} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{C}{A} = \frac{c^2}{a^2},$$

folglich durch Addition

$$\frac{B + C}{A} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Dem Pythagoräischen Satze zufolge ist aber $a^2 = b^2 + c^2$, d. h. der Quotient rechter Hand $= 1$, oder

$$\frac{B + C}{A} = 1 \text{ und folglich } A = B + C,$$

d. h.: Beschreibt man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Vielecke derart, dass die Dreiecksseiten ähnlich liegende Seiten jener Vielecke sind, so beträgt die Fläche des Vielecks über der Hypotenuse soviel als die Flächen der Vielecke über den Katheten zusammengenommen.

Mittelst dieses Satzes kann man sehr leicht ein Vieleck konstruieren, dessen Fläche die Summe oder Differenz der Flächen zweier gegebenen ähnlichen Vielecke ausmacht, und welches jenen zugleich ähnlich ist.

---

## Konstruktionen zu Kap. IV.

1. Zu drei gegebenen Geraden die vierte Proportionallinie zu finden. Wenn drei Gerade gegeben sind, deren Längenzahlen $a$, $b$ und $c$ sein mögen, so nennt man die

vierte Proportionallinie zu denselben diejenige Grade, deren Längenzahl $d$ die Eigenschaft besitzt, dass

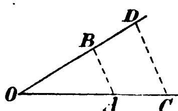
$$a:b = c:d,$$

mithin

$$d = \frac{bc}{a}$$

ist. Schneidet man nun auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels die Strecken $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ab und zieht darauf $CD$ parallel zu der Geraden $AB$, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke $OAB$ und $OCD$, in welchen die Längenzahlen der Seiten in den obigen Verhältnissen stehen; mithin ist $OD$ die gesuchte vierte Proportionale. Dies ist zugleich die geometrische Lösung aller der Aufgaben, welche ins Gebiet der sogenannten Regeldetri gehören.

Fig. 65.




Ist im besonderen Falle $c = b$, also

$$a:b = b:d$$

oder

$$d = \frac{b^2}{a},$$

so nennt man $d$ die dritte Proportionale zu $a$ und $b$; die obige Konstruktion bleibt dieselbe, indem nur $OC = OB$ zu nehmen ist.

2. Zwischen zwei Geraden die mittlere Proportionale zu finden. Sind $a$ und $b$ die Längenzahlen zweier gegebenen Geraden und ist $p$ die Längenzahl einer unbekannten Geraden, welche die Eigenschaft besitzt

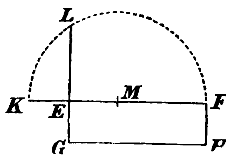
$$a:p = p:b$$

oder

$$p^2 = ab, \quad p = \sqrt{ab},$$

so heisst $p$ die mittlere Proportionale zwischen $a$ und $b$. Die einfache Bemerkung, dass es sich hier nur darum handelt, die Seite eines Quadrates zu finden, welches einem gegebenen Rechtecke ($ab$) an Fläche gleich ist, weist sogleich auf die am Ende von § 13, I gegebene Konstruktion zurück, wonach also $EF = a$ und $EK = b$ aneinander zu setzen sind und über $FK$ mit $KM = \frac{1}{2} FK$ ein Halbkreis zu beschreiben ist, welcher

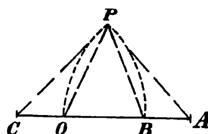
Fig. 66.



eine in $E$ errichtete Senkrechte im Punkte $L$ schneidet, wodurch $EL = p$ gefunden wird.

Kürzer noch kommt man auf folgendem Wege zum Ziele. Man schneide von der grösseren Linie $OA$ ($= a$) die kleinere $OB$ ($= b$) ab, verlängere $OA$ rückwärts um $OC = AB$ und beschreibe über $AC$ als Grundlinie mit dem Schenkel $AO$ das gleichschenklige Dreieck $ACP$; dann ist $OP = BP$ ($= p$) die gesuchte mittlere Proportionale. Da nämlich die Dreiecke $AOP$ und $POB$ den Winkel $OAP$ gemeinschaftlich besitzen und die Seitenverhältnisse $AO : AP$ und $PO : PB$ gleich (beide $= 1$) sind, so folgt daraus die Ähnlichkeit dieser Dreiecke und mithin ist, wenn wir für den Augenblick die Längenzahlen wie die Geraden selber bezeichnen,

Fig. 67.




$$AO : OP = PO : OB,$$

d. i.

$$a : p = p : b,$$

wie es in der That sein muss.

Mittelst dieser Konstruktion ist es leicht, die arithmetische Aufgabe der Quadratwurzelausziehung geometrisch zu lösen. Um z. B. $\sqrt{10}$ zu finden, konstruiere man die mittlere Proportionale zwischen zwei Geraden, deren Längenzahlen entweder $a = 1$ und $b = 10$ oder $a = 2$ und $b = 5$ sind. Man hat dann im ersten Falle

$$1 : p = p : 10,$$

d. h.

$$p^2 = 10, \text{ folglich } p = \sqrt{10},$$

und im zweiten

$$2 : p = p : 5,$$

d. h.

$$p^2 = 2 . 5, \text{ folglich } p = \sqrt{10}.$$

3. Die algebraische Lösung geometrischer Aufgaben. Die bisherigen Untersuchungen haben uns jetzt an die Stelle geführt, wo es möglich und zugleich höchst vorteilhaft ist, die Algebra mit der Geometrie zu verbinden. Sind nämlich in einer geometrischen Aufgabe bestimmte gerade Linien oder geradlinig begrenzte Flächen gegeben und werden andere Gerade oder Flächen gesucht, so kann man sich zuvörderst

sämtliche Grössen durch Zahlen ausgedrückt denken, die bekannten durch bekannte Zahlen, die unbekannten durch unbekannte Zahlen ($x$, $y$, $z$ u. s. w.). Stellt man ferner die Beziehungen, welche zwischen den bekannten und unbekannten Grössen stattfinden sollen, in Gleichungen dar, so hat jetzt die geometrische Aufgabe ein arithmetisches Gewand erhalten, und indem man jene Gleichungen nach den Regeln der Algebra auflöst, bekommt man zunächst Formeln zur Berechnung der unbekannten Zahlen; man kann nun aber auch in die Geometrie zurückgehen, indem man die Konstruktionen aufsucht, welche diesen Formeln entsprechen. Dies hat keine Schwierigkeit, wenn man sich an die folgende Tabelle hält, in welcher immer $a$, $b$, $c$ die Längenzahlen gegebener Geraden bezeichnen. Es bedeutet nämlich

| | | |
|---|---|---|
| $a + b$ | geometrisch: | die Summe zweier Geraden, |
| $a - b$ | „ | die Differenz zweier Geraden, |
| $ab$ | „ | die Fläche eines aus den Seiten $a$ und $b$ beschriebenen Rechtecks, |
| $a^2$ | „ | die Fläche des über der Seite $a$ konstruierten Quadrates, |
| $\frac{bc}{a}$ | „ | die vierte Proportionale zu $a$, $b$, $c$, |
| $\sqrt{ab}$ | „ | die mittlere Proportionale zwischen $a$ und $b$, |
| $\sqrt{a^2 + b^2}$ | „ | die Hypotenuse des aus den Katheten $a$ und $b$ konstruierten rechtwinkligen Dreiecks, |
| $\sqrt{a^2 - b^2}$ | „ | die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, welches $a$ zur Hypotenuse und $b$ zur andern Kathete hat. |

Das Technische des Verfahrens wird man aus den folgenden Beispielen ersehen, worin die unbekannten Grössen teils Linien, teils Flächen sind.

4. Aus der Kathetensumme und Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren. Nennen wir die unbekannten Katheten des Dreiecks $x$ und $y$, ihre gegebene Summe $s$ und die gleichfalls gegebene Hypotenuse $a$*, so haben wir zunächst

* Es versteht sich von selbst, dass hier sämtliche Buchstaben Längenzahlen bedeuten, denn mit Linien kann man nicht rechnen; doch hat obige Redeweise den Vorteil der Kürze und wird deswegen häufig angewendet.

A) $$x + y = s;$$

ferner, weil das Dreieck ein rechtwinkliges sein soll, also der Pythagoräische Lehrsatz gelten muss,

B) $$x^2 + y^2 = a^2.$$

Subtrahiert man das Quadrat der Gleichung A) von dem Doppelten der Gleichung B), so bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - s^2,$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel ist

C) $$x - y = \sqrt{2a^2 - s^2}.$$

Die halbe Summe und die halbe Differenz der Gleichungen A) und C) geben nun

D) $$x = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{2a^2 - s^2}),$$

E) $$y = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{2a^2 - s^2}),$$

womit die Katheten gefunden sind. Setzt man noch $2a^2 = \alpha^2$, also

$$\alpha = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2},$$

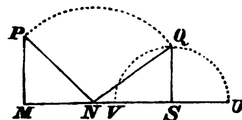
so wird

$$x = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{\alpha^2 - s^2}),$$

$$y = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{\alpha^2 - s^2}),$$

und nun ist es sehr leicht, die Katheten zu konstruieren, wenn man überlegt, dass $\alpha$ die Hypotenuse eines aus den gleichen Katheten $a$ und $a$ beschriebenen rechtwinkligen Dreiecks und $\sqrt{\alpha^2 - s^2}$ die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, welches $\alpha$ zur Hypotenuse und $s$ zur andern Kathete hat. Dies giebt folgende Konstruktion: Man mache $MN = MP = a$, stelle $MP$ senkrecht $MN$, und ziehe $NP$ ($NP = \sqrt{a^2 + a^2} = \alpha$); man nehme ferner $NS = s$, errichte in $S$ eine Senkrechte auf $NS$ und beschreibe aus $N$ als Mittelpunkt mit $NP$ als Halbmesser einen Kreis, welcher jene Senkrechte in $Q$ schneidet ($QS = \sqrt{NQ^2 - s^2} = \sqrt{NP^2 - s^2} = \sqrt{\alpha^2 - s^2} = \sqrt{2a^2 - s^2}$); man nehme endlich $SU = SV = SQ$, so ist die Hälfte von $NU$ die grössere Kathete und die Hälfte von $NV$ die kleinere Kathete des gesuchten Dreiecks.

Fig. 68.



5. Aus der Hypotenuse und der darauf stehenden Höhe ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren. Nennen wir wieder $x$ und $y$ die Katheten, $h$ die gegebene Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse $a$, so ist erstlich

A) $$x^2 + y^2 = a^2.$$

Eine zweite Gleichung ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Fläche des unbekannten Dreiecks auf doppelte Weise berechnet werden kann; einerseits ist sie das halbe Produkt aus den Katheten, andererseits das halbe Produkt aus der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe; also hat man $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}ah$ oder

B) $$2xy = 2ah.$$

Aus den Gleichungen A) und B) folgt durch Addition und Subtraktion

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2ah,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2ah;$$

ferner durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x + y = \sqrt{a(a+2h)},$$
$$x - y = \sqrt{a(a-2h)}.$$

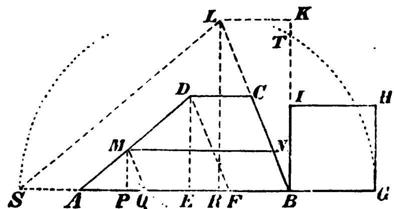
Die halbe Summe und die halbe Differenz dieser Gleichungen geben

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a(a+2h)} + \sqrt{a(a-2h)}\right\},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a(a+2h)} - \sqrt{a(a-2h)}\right\},$$

und hiervon ist die Konstruktion sehr leicht, wenn man berücksichtigt, dass $\sqrt{a(a+2h)}$ die mittlere Proportionale zwischen den Linien $a$ und $a + 2h$, ebenso $\sqrt{a(a-2h)}$ die mittlere Proportionale zwischen den Linien $a$ und $a - 2h$ bedeutet.

6. Von einem Trapeze soll durch eine Parallele zur Grundlinie ein Trapez abgeschnitten werden, welches einem gegebenen Quadrate an Fläche gleich ist. Es sei $ABCD$ das gegebene Trapez, $AB = a$, $CD = b$ und die Höhe $DE = h$; das gegebene Quadrat $BGHI$ habe die Seite $= q$. Das abzu-

Fig. 69.



schneidende Trapez $ABNM$ würde vollkommen bestimmt sein, wenn $MN = x$ oder seine Höhe $MP = y$ bekannt wäre; ziehen wir nun $DF$ und $MQ$ parallel zu $BC$, so entstehen die ähnlichen Dreiecke $ADF$ und $AMQ$, in welchen

$$AF : DE = AQ : MP,$$

d. h.

$$a - b : h = a - x : y,$$

oder

A) $$y = \frac{a - x}{a - b} h$$

ist. Da ferner die Fläche von $ABNM$ gleich der Fläche von $BGHI$ sein soll, so muss

$$\frac{a + x}{2} h = q^2$$

oder

$$(a + x) y = 2q^2$$

sein und hieraus wird durch Substitution des Wertes von $y$

$$\frac{a^2 - x^2}{a - b} h = 2q^2.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung findet man

B) $$x = \sqrt{a^2 - \frac{(a - b) 2q}{h} q}.$$

Um diesen Ausdruck geometrisch zu konstruieren, sei

$$\frac{(a - b) 2q}{h} = \alpha,$$

oder

$$h : a - b = 2q : \alpha,$$

so findet man zunächst $\alpha$ als eine vierte Proportionale; ferner sei $\alpha q = \beta^2$ oder $\beta = \sqrt{\alpha q}$, so ist $\beta$ die mittlere Proportionale zwischen $\alpha$ und $q$, und nun hat man

$$x = \sqrt{a^2 - \beta^2},$$

wie man sogleich erkennt, wenn erst für $\beta$ sein Wert und dann wieder der Wert von $\alpha$ substituiert wird; hier ist aber $x$ mittelst eines rechtwinkligen Dreiecks, welches $a$ zur Hypotenuse und $\beta$ zur einen Kathete hat, leicht zu finden. Dies giebt folgende Konstruktion: Man mache $2BK = BI = 2q$,

ziehe $KL$ parallel zu $AB$, bis sie die verlängerte $BC$ in $L$ schneidet, und lege durch $L$ eine Parallele zu $AD$; dann ist in den Dreiecken $ADF$ und $SLB$

Fig. 69.

$$DE : AF = LR : SB,$$

d. h.

$$h : a - b = 2q : SB,$$

mithin $SB = \alpha$. Zwischen $BS$ und $BG$ suche man die mittlere Proportionale $BT = \sqrt{BS \cdot BG} = \sqrt{\alpha q} = \beta$; mit $AB = a$ als Halbmesser beschreibe man endlich aus $T$ als Mittelpunkt einen Kreis, welcher $AB$ in $Q$ schneidet, so ist

$$BQ = \sqrt{(QT^2 - BT^2)} = \sqrt{a^2 - \beta^2} = x.$$

Man hat jetzt weiter nichts zu thun, als $QM \parallel BC$ und $MN \parallel AB$ zu ziehen, um sogleich das verlangte Trapez zu bekommen.

Bemerkenswert ist der Fall, in welchem das Trapez $ABNM$ die Hälfte des gegebenen Trapezes $ABCD$ ausmacht, also

$$q^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)h}{2}$$

oder

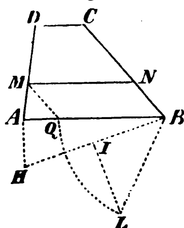
$$\frac{2q^2}{h} = \frac{a+b}{2}$$

ist. Man erhält dann aus der Formel B)

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2+b^2)},$$

was sich auf folgende Weise konstruieren lässt. Man stelle $AH = CD$ senkrecht auf $AB$, halbiere die Hypotenuse $BH$ in $I$, errichte ferner $IL = BI$ senkrecht auf $BH$ und ziehe $BL$, so ist $BL = BQ = x$.

Fig. 70.




Nimmt man in den bisherigen Formeln $b = 0$, so geht das Trapez in ein Dreieck über, sodass also die entsprechenden Aufgaben für das Dreieck hier zugleich mit gelöst sind. Eine vorteilhafte praktische Anwendung von diesen Formeln ist die Teilung beliebiger Vielecke in Teile von bestimmten

Verhältnissen, wenn zugleich die Teilungslinien einer gegebenen Geraden parallel laufen sollen.

7. Aus der Hypotenuse und der Kathetensumme die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden. Behalten wir dieselbe Bezeichnung wie in Nr. 4 bei, so ist

$$x + y = s, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

und wenn wir die zweite Gleichung vom Quadrate der ersten subtrahieren, so bleibt

$$2xy = s^2 - a^2,$$

endlich durch Division mit 4

$$\frac{xy}{2} = \frac{s^2 - a^2}{4},$$

und damit ist die Fläche des Dreiecks gefunden. Setzen wir dieselbe gleich der Fläche eines noch unbekannten Quadrates, welches die Seite $q$ besitzt, so haben wir

$$q^2 = \frac{s^2 - a^2}{4},$$

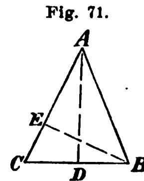
folglich

$$q = \frac{\sqrt{s^2 - a^2}}{2},$$

und nun ist diese Quadratseite leicht zu finden, wenn man berücksichtigt, dass sie die Hälfte von der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ausmacht, welches $s$ zur Hypotenuse und $a$ zur anderen Kathete hat.

8. Aus den beiden Höhen eines gleichschenkligen Dreiecks die Fläche desselben zu finden. Es sei $BC$ die unbekannte Basis $x$ des gleichschenkligen Dreiecks, $AB = AC = y$ der gleichfalls unbekannte Schenkel desselben, ferner die Höhe $AD = h$ und die Höhe $BE = k$. Die Fläche unseres Dreiecks lässt sich auf doppelte Weise berechnen; es ist nämlich

Fig. 71.




$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, BC . AD = \tfrac{1}{2}\, xh,$$
$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, AC . BE = \tfrac{1}{2}\, yk,$$

also

$$hx = ky \quad \text{oder} \quad y = \frac{hx}{k};$$

ferner ist $CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} x$ und mithin zufolge des Pythagoräischen Lehrsatzes

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2,$$

d. i.

$$h^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 = y^2 = \left(\frac{hx}{k}\right)^2,$$

wenn man gleich den Wert von $y$ aus der vorhergehenden Gleichung substituiert. Aus der vorstehenden quadratischen Gleichung erhält man

$$\text{A)} \qquad x = \frac{2hk}{\sqrt{(2h)^2 - k^2}}.$$

Setzen wir die Fläche $\frac{1}{2}hx = q^2$, so folgt vermöge des Wertes von $x$

$$q = \sqrt{\frac{hk}{\sqrt{(2h)^2 - k^2}}\, h}.$$

Sowohl $x$ als $q$ sind leicht zu konstruieren, indem man zuerst berücksichtigt, dass

$$\sqrt{(2h)^2 - k^2} = \alpha$$

die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ausmacht, welches $2h$ zur Hypotenuse und $k$ zur anderen Kathete hat. Es ist dann

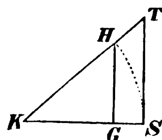
$$x = \frac{2hk}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \alpha : k = 2h : x$$

und mithin $x$ die vierte Proportionale zu $\alpha$, $k$ und $2h$. Um aber $q$ zu finden, setzen wir

$$\frac{hk}{\sqrt{(2h)^2 - k^2}} = \frac{hk}{\alpha} = \beta,$$

wo nun $\beta$ die vierte Proportionale zu $\alpha$, $k$ und $h$, endlich $q = \sqrt{\beta h}$, d. h. die mittlere Proportionale zwischen $\beta$ und $h$ ist.

Fig. 72.




Dies giebt folgende zwei Konstruktionen. Man macht $GH = k$ und errichtet in $G$ eine Senkrechte auf $GH$; aus $H$ als Mittelpunkt beschreibt man mit $2h$ als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher jene Senkrechte in $K$ schneidet; es ist dann

$$GK = \sqrt{(\overline{HK}^2 - \overline{GH}^2)} = \sqrt{(2h)^2 - k^2}$$

und mithin $GK = \alpha$. Nimmt man jetzt $KS = KH = 2h$ und zieht $ST \parallel GH$, so ist

$$GK : GH = SK : ST,$$

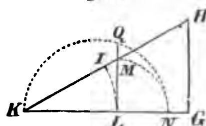
d. h.

$$\alpha : k = 2h : ST,$$

und mithin $ST = x$; aus der so gefundenen Basis ist das gleichschenklige Dreieck leicht zu konstruieren.

Um dagegen $q$ zu finden, beschreibt man wie vorhin das rechtwinklige Dreieck $GHK$, in welchem $HK = 2HI = 2h$ ist, nimmt $KL = KI = h$ und zieht $LM \parallel GH$, so ist

Fig. 73.




$$GK : GH = LK : LM,$$

d. h.

$$\alpha : k = h : LM,$$

mithin $LM = \beta$. Darauf macht man $LN = LM = \beta$ und sucht zwischen $LK$ und $LN$ die mittlere Proportionale $LQ$; dieselbe ist $= \sqrt{LK \,.\, LN} = \sqrt{h\beta}$, d. h. $= q$, womit also die Linie $q$ ihre Bestimmung gefunden hat.

# Der Kreis.

## Kap. V.

## Die Bögen, Winkel und Linien am Kreise.

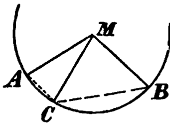
### § 22.

### Die Bögen und die Centriwinkel.

I. Kennt man von einem Kreise den Halbmesser, so kann nach dem, was wir über die Entstehung des Kreises gesagt haben (S. 8), der Kreis selbst jederzeit beschrieben werden; dies geht jedoch nur auf eine einzige Art, oder, was dasselbe ist, ein gegebener Halbmesser liefert nicht mehrere verschiedene Kreise, sondern nur einen einzigen Kreis. Daher ist der Kreis durch seinen Halbmesser unzweideutig bestimmt, und Kreise von demselben Halbmesser sind kongruent; legt man sie mit ihren Mittelpunkten aufeinander, so decken sich die Kreise völlig.

Die erste Frage nun, welche wir zu beantworten haben, ist die, ob der Kreis eine gerade, krumme oder gemischte Linie ist, was sich aus der Definition des Kreises unmittelbar nicht, nach den Lehren des ersten Kapitels dagegen sehr leicht erkennen lässt. Gesetzt nun, ein Teil des Kreises, etwa das zwischen die Punkte $A$ und $B$ fallende Stück desselben, wäre eine gerade Linie, so nehme man zwischen $A$ und $B$ einen dritten Punkt $C$ an und ziehe die Halbmesser $AM$, $BM$, $CM$; dann müssten, wegen der Gleichheit aller Radien, die Dreiecke $ABM$ und $ACM$ gleichschenklig sein, woraus folgen würde:

Fig. 73.



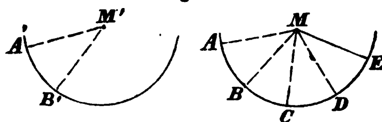

$$\angle MAB = \angle MBA \text{ und } \angle MAC = \angle MCA,$$

mithin, weil $\angle MAB = \angle MAC$, auch $\angle MBA = \angle MCA$, was unmöglich ist, weil $\angle MCA$ den Aussenwinkel des Dreiecks $BCM$ bildet; kein Stück des Kreises kann also geradlinig verlaufen und mithin ist der Kreis selbst eine krumme Linie. Irgend ein Teil desselben, wie z. B. der zwischen $A$ und $B$ liegende, heisst ein Kreisbogen und wird dadurch bezeichnet, dass man die an seinen Endpunkten stehenden Buchstaben nebeneinander und die Silbe *arc* (Abkürzung von *arcus*) davorsetzt (*arc* $AB$).

II. Zieht man von den Endpunkten eines Bogens Gerade nach dem Mittelpunkte des Kreises, so bilden letztere einen Winkel miteinander, welcher seinen Scheitel im Mittelpunkte hat, und wie man zu sagen pflegt, über dem gegebenen Bogen steht; ein derartiger Winkel heisst ein Centriwinkel (der Centriwinkel $AMB$ z. B. steht über dem Bogen $AB$). Man erkennt aus diesem Winkel die Grösse der Drehung, welche nötig war, um mit dem gegebenen Halbmesser den gegebenen Bogen zu beschreiben. Wie eng überhaupt der Zusammenhang zwischen dem Bogen und seinem Centriwinkel ist, wird man aus folgenden Betrachtungen ersehen.

Kommen in zwei mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreisen zwei gleiche Centriwinkel $\angle AMB = \angle A'M'B'$ vor, so kann man den zweiten Kreis so auf den ersten legen, dass sich die gleichen Centriwinkel decken, also $M'$ auf $M$, $A'M'$ auf $AM$, $B'M'$ auf $BM$ fällt;

Fig. 75.




wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Halbmesser decken sich aber (nach Nr. I) die Kreise ganz und gar und mithin müssen auch die Bögen $AB$ und $A'B'$ zusammenfallen; d. h. In Kreisen von gleichen Halbmessern gehören gleiche Bögen zu gleichen Centriwinkeln. Weiss man umgekehrt, dass die Halbmesser und die Bögen einander gleich sind, so kann man die Kreise so aufeinander legen, dass $M'$ auf $M$ und $M'A'$ auf $MA$ (also $A'$ auf $A$) fällt; dann decken sich die Kreise wieder vollständig, es fällt $B'$ auf $B$ und mithin auch $M'B'$ auf $MB$, weil es zwischen zwei Punkten nur eine Gerade giebt; d. h.: In Kreisen von gleichen Halb-

messern gehören gleiche Centriwinkel zu gleichen Bögen.

Setzen wir, wie vorhin, gleiche Centriwinkel voraus und bringen die beiden in Rede stehenden Kreise jetzt so übereinander, dass $M'$ auf $M$ und $M'A'$ auf $MB$ zu liegen kommt, so fällt $M'B'$ etwa nach $MC$ und wir haben $arc BC = arc A'B'$, d. i. $= arc AB$, und mithin $arc AC = 2\, arc AB$. Die Verdoppelung des Centriwinkels ($\angle AMC = 2 \angle AMB$) hat also eine Verdoppelung des entsprechenden Bogens zur Folge. Ebenso leicht erhellt, dass, wenn $\angle AMD = 3 \angle AMB$ ist, auch $arc AD = 3\, arc AB$ sein muss, woraus von selbst hervorgeht, dass sich ein gegebener Kreisbogen beliebig vervielfachen lässt, indem man seinen zugehörigen Centriwinkel vervielfacht. Wird dagegen umgekehrt der zu einen gegebenen Bogen $AD$ gehörende Centriwinkel $AMD$ in mehrere gleiche Teile geteilt, wie z. B. $\angle AMB = \frac{1}{3} \angle AMD$, so entsprechen diesen gleichen Teilen des Centriwinkels auch gleiche Teile des zugehörigen Bogens, nämlich $arc AB = \frac{1}{3} arc AD$. Fassen wir dies alles zusammen, so ergiebt sich der Satz: Es lässt sich jederzeit ein Kreisbogen finden, welcher ein vorgeschriebenes Vielfaches oder einen vorgeschriebenen Teil eines gegebenen Kreisbogens ausmacht.

Eine wichtige Anwendung hiervon ist die Teilung des Kreises. Denkt man sich nämlich den Kreisumfang in 360 gleiche Teile zerlegt, so entsteht ein Bogen, welcher ein Bogengrad heisst; den 60sten Teil desselben nennt man eine Minute (Bogenminute), der 60ste Teil der Minute führt den Namen Sekunde (Bogensekunde); noch kleinere Teile des Kreises drückt man durch Decimalbrüche von Sekunden aus. Für den Grad dient das Zeichen: $^0$, für Minute: $'$ und für Sekunde: $''$; wonach z. B. $57^0\ 17'\ 44'',8$ so viel bedeutet als 57 Grad, 17 Minuten, $44\frac{8}{10}$ Sekunden. Nach dieser Einteilung enthält also der ganze Kreisumfang $360^0 = 21600' = 1296000''$, der Halbkreis $180^0 = 10800' = 648000''$, der Viertelkreis (Quadrant) $90^0 = 5400' = 324000''$, der Achtelkreis (Oktant) $45^0 = 2700' = 162000''$ und der Sechstelkreis (Sextant) $60^0 = 3600' = 216000''$. Wie man sieht, ist diese Teilung des Kreises analog der in § 2 erwähnten Winkelteilung.

## § 23.
## Die Centriwinkel und die Peripheriewinkel.

Zieht man von zwei auf dem Umfange eines Kreises liegenden Punkten gerade Linien nach einem dritten Punkte des Umfanges, so schliessen diese Geraden einen Winkel ein, der **Peripheriewinkel** genannt wird, weil sein Scheitel auf dem Umfange (der **Peripherie**) des Kreises liegt; dergleichen Winkel sind z. B. die Winkel $APB$ in den Fig. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Fig. 76 $\alpha$.

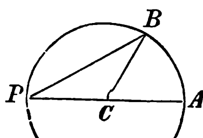



Fig. 76 $\beta$.

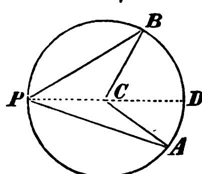
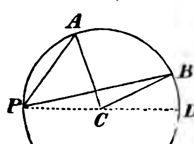



Fig. 76 $\gamma$.




Bleiben wir zunächst bei der einfachen Figur $\alpha$ stehen, wo der Schenkel $AP$ durch den Kreismittelpunkt $C$ geht, und konstruieren den zugehörigen Centriwinkel $ACB$ durch Ziehen von $BC$, so ist der letztere Aussenwinkel zu dem Dreiecke $BCP$ und daher

$$\angle ACB = \angle BPC + \angle CBP.$$

Wegen der Gleichheit der Halbmesser ist aber das Dreieck $BCP$ gleichschenklig, mithin $\angle BPC = \angle CBP$, und folglich

1) $$\angle ACB = 2 \angle BPC = 2 \angle APB,$$

d. h. der Centriwinkel gleich dem Doppelten des mit ihm auf gleichem Boden stehenden Peripheriewinkels.

Ziehen wir weiter in Fig. $\beta$ die Gerade $PCD$, so haben wir nach dem Vorigen die Gleichungen

$$\angle ACD = 2 \angle APD,$$
$$\angle BCD = 2 \angle BPD,$$

und folglich durch Addition

2) $$\angle ACB = 2 (\angle APD + \angle BPD) = 2 \angle APB.$$

Ziehen wir ebenso in Fig. $\gamma$ die Gerade $PCD$, so ist wieder

$$\angle ACD = 2 \angle APD,$$
$$\angle BCD = 2 \angle BPD,$$

und folglich durch Subtraktion

3) $$\angle ACB = 2 (\angle APD - \angle BPD) = 2 \angle APB.$$

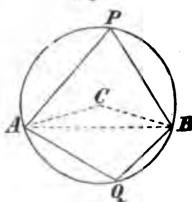
Die hier betrachteten drei Fälle stellen, wie leicht zu sehen ist, die allein möglichen Lagen dar, welche ein Peripheriewinkel und sein zugehöriger Centriwinkel gegen einander haben können; denn entweder fällt der Punkt $D$ mit einem der Punkte $A$ oder $B$ zusammen (Fig. $\alpha$), oder $D$ fällt zwischen $A$ und $B$ (Fig. $\beta$), oder endlich $D$ liegt ausserhalb des Bogens $AB$ (Fig. $\gamma$). Da nun in jedem Falle die Gleichung $\angle ACB = 2 \angle APB$ besteht, so haben wir den Satz: Wenn ein Centriwinkel und ein Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen stehen, so ist der Centriwinkel das Doppelte des Peripheriewinkels, oder umgekehrt der Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels.

Über einem gegebenen Bogen giebt es nur einen Centriwinkel, dagegen unzählige Peripheriewinkel; da jeder von den letzteren die Hälfte des einen Centriwinkels ausmacht, so folgt noch: Alle über einem und demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel sind einander gleich.

Besonderes Interesse hat der Fall, wenn der Centriwinkel ein gestreckter $= 2R$ ist, also der Peripheriewinkel über dem Halbkreise steht; letzterer beträgt dann jederzeit einen rechten Winkel, was man in der kurzen Formel auszudrücken pflegt: Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Konstruiert man zwei Peripheriewinkel $APB$ und $AQB$, deren Scheitel auf entgegengesetzten Seiten der Verbindungslinie $AB$ liegen, so ist $\angle APB$ die Hälfte des konkaven Winkels $ACB$ und $\angle AQB$ die Hälfte des konvexen Winkels $A\c{C}B$, denn beide stehen über dem Bogen $APB$; die Winkel $APB$ und $AQB$ betragen daher zusammen die Hälfte von der Summe des konkaven und konvexen Winkels bei $C$, d. h. die Hälfte von vier Rechten; es ist demnach $\angle APB + AQB = 2R$.

Fig. 77.




§ 24.

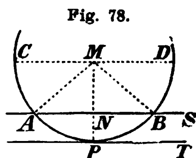
## Die Sehnen und die Sekanten.

I. Jede gerade Linie, welche zwei Punkte eines Kreisumfanges miteinander verbindet, heisst eine Sehne (Chorde)

des Kreises; ist sie noch über jene Punkte hinaus verlängert, so führt sie dem Namen Sekante. Da aus den Betrachtungen § 22, I hervorgeht, dass eine Gerade höchstens zwei Punkte mit einem Kreise gemein haben kann, so lassen sich obige Erklärungen auch so fassen: Sekante heisst jede Gerade, welche mit einem Kreise zwei Punkte gemein hat, Sehne das Stück der Sekante, welches zwischen jenen Punkten liegt.

Verbindet man die Endpunkte einer Sehne durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis die Sehne ist, z. B. $ABM$; zieht man noch eine Gerade von der Mitte $N$ der Sehne nach dem Mittelpunkte $M$, so zerfällt das Dreieck $ABM$ in zwei andere Dreiecke $AMN$ und $BMN$, welche in allen Seiten miteinander übereinstimmen und daher kongruent sind. Daraus folgt weiter, dass $MN$ den Centriwinkel $AMB$ halbiert und senkrecht auf $AB$ steht; dass mithin $MN$ der Abstand der Sehne vom Centrum ist. In dem rechtwinkligen Dreiecke $AMN$ haben wir nun

Fig. 78.




$$AN = \sqrt{(\overline{AM}^2 - \overline{MN}^2)},$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} AB = \sqrt{(\overline{AM}^2 - \overline{MN}^2)},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $AB = a$, $AM = r$, $MN = c$ setzen und die vorige Gleichung mit 2 multiplizieren,

1) $$a = 2\sqrt{r^2 - c^2}.$$

Dieser Ausdruck erhält seinen grössten Wert, wenn so wenig als möglich von $r^2$ subtrahiert wird, also $c = 0$ ist; es wird dann $a = 2\sqrt{r^2} = 2r$, in der Figur $= CD$. Nennen wir den doppelten Halbmesser des Kreises kurz seinen Durchmesser, so heisst dies: Der Durchmesser ist die grösste aller Sehnen.

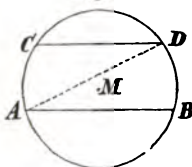
Lassen wir in der Formel 1) $c$ von Null an zunehmen, so wird immer mehr subtrahiert, und es bleibt also immer weniger übrig, d. h.: Je grösser die Entfernung einer Sehne vom Mittelpunkte ist, desto kleiner ist die Sehne selbst.

Geben wir endlich $c$ seinen grössten Wert $c = MP = r$, so wird $c = 0$, also die Sehne am kleinsten, und in der That zieht sich dann die Sehne auf einen blossen Punkt zusammen.

II. Wenn wir nach Erledigung dessen, was über eine Sehne gesagt werden kann, uns zur Betrachtung von zwei Sehnen wenden, so sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob jene Sehnen gleiche Richtung haben oder nicht.

*a)* Laufen die beiden Sehnen $AB$ und $CD$ einander parallel und zieht man $AD$, so entstehen zwei gleiche Wechselwinkel, $BAD$ und $CDA$, die zugleich Peripheriewinkel sind. Der erste steht über dem Bogen $BD$, ihm würde der Centriwinkel $BMD$ entsprechen; der zweite steht über $arc\,AC$ und sein Centriwinkel wäre $AMC$; aus der Gleichheit jener Peripheriewinkel folgt aber die Gleichheit der zugehörigen Centriwinkel und aus dieser die Gleichheit der entsprechenden Bögen $BD$ und $AC$; d. h.: **Zwischen zwei parallelen Sehnen liegen gleiche Bögen.**

Fig. 79.




Der Satz gilt übrigens auch umgekehrt, denn sind die Bögen gleich, so sind auch jene Winkel gleich und folglich die Sehnen wegen der Gleichheit der Wechselwinkel parallel.

*b)* Haben zwei Sehnen ungleiche Richtung, so müssen sie sich (nötigenfalls verlängert) schneiden; ihr Durchschnittspunkt kann nun in Beziehung auf den Kreis eine dreifach verschiedene Lage haben; entweder nämlich liegt er auf der Peripherie des Kreises selbst (Fig. 80), oder innerhalb des Kreises (Fig. 81$\alpha$), oder endlich ausserhalb desselben (Fig. 81$\beta$). Dies giebt folgende Betrachtungen.

$\alpha$) Schneiden sich die Sehnen $AB$ und $AC$ in dem Punkte $A$ des Kreisumfanges und sind $P$ und $Q$ die Halbierungspunkte derselben, so stehen die Geraden $MP$ und $MQ$ senkrecht auf $AB$ und $AC$ (Nr. I.); umgekehrt müssen auch Gerade, welche man von $P$ senkrecht auf $AB$ und von $Q$ senkrecht auf $AC$ aufsteigen lässt, durch $M$ gehen, da sie von $PM$ und $QM$ nicht verschieden sein können. Wenn also der Mittelpunkt des Kreises nicht bekannt wäre, so würde man ihn dadurch finden können, dass man die gegebenen Sehnen durch Senkrechte halbierte und

letztere bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängerte. Einen solchen Durchschnittspunkt muss es immer geben, weil der Winkel $ATQ$ ein spitzer, $\angle APM$ dagegen ein rechter ist, und mithin die Geraden $PM$ und $QT$ (oder $QM$) verschiedene Richtungen haben. — Das genannte Verfahren bleibt aber ganz dasselbe, wenn man sich den Kreis selber weg denkt und von den Sehnen nur ihre Endpunkte $A$, $B$, $C$ beibehält, die natürlich nicht in einer geraden Linie liegen dürfen (es würde sonst $QT \parallel MP$); man zieht dann die Sehnen $AB$, $AC$, macht die vorige Konstruktion, und nun muss $M$ der Mittelpunkt des Kreises sein, auf welchem die Punkte $A$, $B$, $C$ liegen. In der That lässt sich mit Hilfe kongruenter Dreiecke sehr leicht nachweisen, dass die, in der Figur nicht gezogenen Geraden $AM$, $BM$, $CM$ einander gleich sind und folglich als Halbmesser eines Kreises angesehen werden können. Dies giebt den Satz: Ein Kreis ist durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte bestimmt.

Fig. 80.

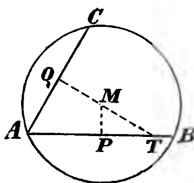



Fig. 81 α.

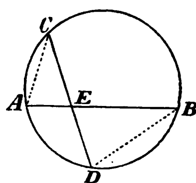
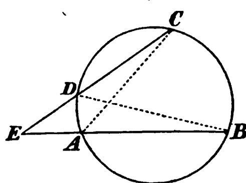



Fig. 81 β.




β) Schneiden sich zwei Sehnen $AB$ und $CD$ innerhalb oder ausserhalb des Kreises in $E$, so ist, wenn man $AC$ und $BD$ zieht (sowohl in Fig. α als β), $\angle AEC = \angle BED$ und $\angle ACE = \angle DBE$ (als Peripheriewinkel über demselben Bogen oder als Supplemente solcher Peripheriewinkel); die Dreiecke $ACE$ und $DBE$ sind daher ähnlich und geben

$$AE : CE = DE : BE$$

oder

$$AE . BE = CE . DE,$$

d. h.: Das Produkt aus den Abschnitten der einen Sehne ist gleich dem Produkte aus den Abschnitten der anderen.

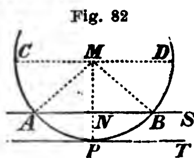
Findet umgekehrt bei zwei Geraden $AB$ und $CD$, die sich in $E$ schneiden, die obige Gleichung statt, so müssen die vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ auf dem Umfange eines und desselben Kreises liegen. Denn ginge der durch $A$, $B$ und $C$ mögliche Kreis nicht durch $D$, sondern durch einen anderen Punkt $D'$ der Geraden $CD$, so wäre gleichzeitig $AE.BE = CE.DE$ und $AE.BE = CE.D'E$, was sich zusammen nicht verträgt. Während also durch drei Punkte im allgemeinen immer ein Kreis gelegt werden kann, ist dies durch vier Punkte nur dann möglich, wenn die oben entwickelte Gleichung stattfindet; letztere enthält daher die Bedingung, unter welcher ein Kreis durch vier gegebene Punkte gehen kann.

## § 25.

## Die Tangenten des Kreises.

I. Wir haben bisher solche gerade Linien betrachtet, welche zwei Punkte mit dem Kreisumfange gemein haben, und es bleibt daher noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem eine Gerade und ein Kreis nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich besitzen. Lassen wir die Sekante $AS$ so fortrücken, dass sie immer senkrecht auf $MP$ bleibt, so kommen die Punkte $A$ und $B$ einander um so näher, je weiter sich $N$ von $M$ entfernt; ist endlich $N$ in $P$ angelangt, so fallen die zwei Punkte $A$ und $B$ in einen einzigen zusammen, die Sekante nimmt die Lage $PT$ an und hat jetzt nur einen Punkt, nämlich $P$, mit dem Kreise gemein. Eine derartige Gerade heisst eine Tangente des Kreises und der Punkt $P$, welchen sie mit dem Kreise gemein hat, ihr Berührungspunkt.

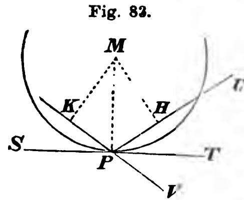
Fig. 82




Die Entstehungsweise der Tangente scheint darauf hinzudeuten, dass die Tangente $PT$ senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser $MP$ stehen müsse; ob dies immer der Fall ist, entscheidet sich leicht, wenn man solche Gerade $PU$ oder $PV$ betrachtet, welche mit $MP$ einen spitzen oder stumpfen Winkel machen. Fällt man von $M$ eine Senkrechte $MH$ auf $PU$, so ist $MH < MP$, mithin liegt der Punkt $H$

im Innern des Kreises und folglich muss die Gerade $PU$ den Kreisumfang zweimal schneiden (beim Eintritte in den Kreis und beim Austritte aus demselben); fällt man ebenso auf die Verlängerung von $PV$ das Perpendikel $MK$, so ist wieder $KM < MP$, es liegt daher auch $K$ im Innern des Kreises und die Gerade $PV$ schneidet, hinreichend verlängert, den Kreis zweimal. Die Geraden $PU$ und $PV$ sind daher Sekanten und keine Tangenten. Dass aber jeder von $P$ verschiedene Punkt $S$ der senkrecht stehenden Geraden $PT$ ausserhalb des Kreises liegt, erkennt man daraus, dass die Hypotenuse $MS$ grösser als die Kathete $MP$ sein muss. Dies giebt den Satz: Jede auf dem Endpunkte eines Halbmessers senkrecht stehende Gerade ist eine Tangente des Kreises; und umgekehrt: Jede Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser. (Denn wenn sie nicht senkrecht stünde, so wäre sie wie $PU$ und $PV$ eine Sekante, was der Voraussetzung widerspricht.)

Fig. 83.




Aus dem Obigen folgt noch der Satz: Durch einen gegebenen Punkt auf dem Umfange eines Kreises ist nur eine einzige Tangente möglich.

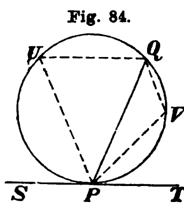
II. Auf die Betrachtung von einer Tangente müsste nun die von zwei Tangenten folgen; man wird aber leicht finden, dass hierbei die Ausbeute sehr gering ist, und wir wenden uns daher zu der Vergleichung zwischen den Tangenten und Sehnen. Hier sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Tangente und die Sehne gleiche Richtung haben (Fig. 82) oder nicht (Fig. 84).

*a)* Laufen die Sehne $AB$ und die Tangente $PT$ einander parallel, so steht der nach dem Berührungspunkte $P$ gezogene Halbmesser nicht nur auf der Tangente, sondern auch auf der Sehne $AB$ senkrecht, woraus die Kongruenz der Dreiecke $AMN$ und $BMN$ und die Gleichheit der Winkel $AMP$ und $BMP$ folgt. Diese zieht die Gleichheit der entsprechenden Bögen $AP$ und $BP$ nach sich, was man mit den Worten ausdrücken kann: Wenn eine Sehne einer Tangente parallel

läuft, so halbiert der Berührungspunkt der letzteren den zwischen beiden Geraden liegenden Bogen.

Man wird leicht bemerken, dass sich der Satz auch umkehren lässt.

Fig. 84.




*b)* Wenn eine Tangente und eine Sehne ungleiche Richtung haben, so müssen sie sich notwendig schneiden, und da dies begreiflicherweise nicht im Innern des Kreises geschehen kann, so muss der Durchschnittspunkt entweder auf dem Umfange oder ausserhalb des Kreises liegen.

*α*) Schneiden sich die Sehne $PQ$ und die Tangente $ST$ im Punkte $P$ der Peripherie (Fig. 84), so ist, wenn die Sehne $QU \| PT$ gezogen wird, $arc PQ = arc PU$ und folglich (weil über gleichen Bögen gleiche Peripheriewinkel stehen) $\angle PUQ = \angle PQU$, und da letzterer als Wechselwinkel $= \angle QPT$ ist, $\angle PUQ = \angle QPT$, wo man bemerken möge, dass $\angle U$ der Peripheriewinkel über dem kleineren Bogen $PQ$ ist. — Zieht man ferner nach einem Punkte $V$ auf diesem Bogen die Geraden $PV$ und $QV$, so ist $\angle PVQ = \angle V$ der Peripheriewinkel über dem grösseren Bogen $PUQ$ oder $PQ$, und man hat nach § 23 (letzter Satz)

$$\angle PUQ + \angle PVQ = 2R$$
$$= \angle QPT + QPS,$$

und wenn man hiervon die vorige Gleichung $\angle PUQ = \angle QPT$ subtrahiert, so bleibt $\angle PVQ = \angle QPS$. Dies giebt folgenden Doppelsatz: Gehen durch einen Punkt auf dem Umfange eines Kreises eine Sehne und eine Tangente, so ist der spitze Winkel, den beide Gerade mit einander bilden, gleich dem Peripheriewinkel über dem kleineren Bogen und der stumpfe Winkel gleich dem Peripheriewinkel über dem grösseren Bogen.

Auch umgekehrt gilt dieser Satz, wie man leicht finden wird.

*β)* Schneiden sich die Sehne $AB$ und die Tangente $SP$ ausserhalb des Kreises in $T$, so lässt sich der vorige Satz anwenden, wenn man die Sehnen $AP$ und $BP$ zieht; es ist dann $\angle BPT$ gleich dem Peripheriewinkel über dem kleineren Bogen $BP$, also $= \angle BAP$. Da ausserdem die Dreiecke $APT$

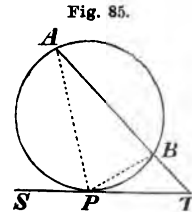
und $PBT$ noch in dem Winkel $T$ übereinstimmen, so folgt $\triangle APT \sim \triangle PBT$ und daraus die Proportion

$$AT : PT = PT : BT$$

oder

$$\overline{PT}^2 = AT . BT.$$

Fig. 85.




In Worten heisst dies: Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente ausserhalb des Kreises, so ist der Abschnitt der Tangente die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Sekante.

Findet umgekehrt zwischen $AT$, $BT$ und $PT$ die obige Beziehung statt, so muss $PT$ eine Tangente an dem durch die Punkte $A$, $B$ und $P$ gehenden Kreise sein. Wegen des gleichen Winkels $T$ und der vorausgesetzten Proportion sind nämlich die Dreiecke $APT$ und $PBT$ ähnlich, mithin $\angle BAP = \angle BPT$ und folglich nach $\alpha$) die Gerade $PT$ eine Tangente des Kreises. Die obige Gleichung stellt also die Bedingung dar, unter welcher ein durch drei Punkte gehender Kreis eine durch den letzten dieser Punkte gezogene Gerade berühren kann.

## § 26.

## Zwei und mehrere Kreise.

Die Vergleichung zweier oder mehrerer Kreise hat zweierlei zu berücksichtigen, einmal die Halbmesser und zweitens die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise; durch das Erste bestimmt sich nämlich die Grösse der Kreise, durch das Zweite ihre gegenseitige Lage. Nennen wir ein- für allemal $r$ und $\varrho$ die Halbmesser und $e$ die Entfernung der Kreismittelpunkte (die Centrale), so haben wir zu untersuchen, welche Beziehungen zwischen $r$, $\varrho$ und $e$ stattfinden müssen, wenn die Kreise diese oder jene Lage zueinander haben sollen.

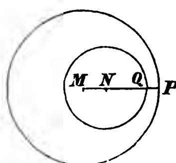
Der einfachste Fall wäre nun offenbar, wenn die beiden Mittelpunkte aufeinander fallen, also $e = 0$ ist. Die Kreise heissen dann konzentrisch und es fällt der eine entweder gänzlich auf den andern (Kongruenz), wenn $r = \varrho$, oder der mit dem kleinern Halbmesser beschriebene liegt innerhalb

des andern, wenn $r$ von $\varrho$ verschieden ist. In jenem Falle haben beide Kreise alle Punkte, in diesem keinen Punkt miteinander gemein.

Sind aber die Kreise nicht konzentrisch, also $e$ von Null verschieden, so können drei verschiedene Fälle eintreten; die Kreise haben nämlich gar keinen Punkt gemein, oder einen Punkt oder endlich zwei Punkte, wie die folgenden Betrachtungen zu erkennen geben.

I. Liegt nämlich der eine Kreis ganz innerhalb, wie in Fig. $\alpha$, oder ganz ausserhalb des andern, wie in Fig. $\beta$, so haben sie keinen Punkt gemein und es ist in Fig. $\alpha$

Fig. 86 $\alpha$.




$$MP = MN + NQ + PQ,$$

d. i.

$$r = e + \varrho + PQ$$

oder

$$1) \qquad r - \varrho = e + PQ,$$

und folglich, wenn man $PQ$ rechter Hand weglässt,

$$2) \qquad r - \varrho > e.$$

Dagegen ist in Fig. $\beta$

Fig. 86 $\beta$.

$$MP + PQ + NQ = MN,$$

d. i.

$$r + PQ + \varrho = e$$

oder

$$3) \qquad r + \varrho = e - PQ$$

und, wenn man $PQ$ rechter Hand weglässt,

$$4) \qquad r + \varrho < e.$$

Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass, wenn eine der Bedingungen

$$r - \varrho > e \text{ oder } r + \varrho < e$$

erfüllt ist, die Kreise keinen Punkt miteinander gemein haben und dass im ersten Falle der eine Kreis innerhalb des andern, im zweiten Falle ausserhalb des andern liegt.

II. Wenn sich die beiden Punkte $P$ und $Q$ in einen einzigen zusammenziehen, also $PQ = 0$ ist (Fig. $\alpha$ und $\beta$), so gehen die Gleichungen 1) und 3) in die folgenden über:

$$5) \qquad r - \varrho = e \text{ und } r + \varrho = e.$$

Die Kreise haben jetzt einen Punkt $P$ miteinander gemein, oder sie berühren sich, und zwar ist die Berührung eine innere

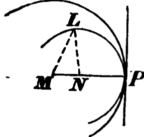


Fig. 87 $\alpha$.

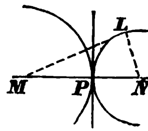


Fig. 87 $\beta$.

oder äussere, je nachdem der kleinere Kreis innerhalb des grösseren Kreises liegt (Fig. $\alpha$) oder ausserhalb desselben (Fig. $\beta$). Dass in der That die beiden Kreise keinen Punkt weiter als $P$ gemein haben, ist leicht zu sehen, denn zieht man in Fig. $\alpha$ nach einem von $P$ verschiedenen Punkte $L$ auf der Peripherie des kleineren Kreises die Geraden $LM$ und $LN$, so ist $LM < MN + LN$, d. i. $LM < e + \varrho$, oder, weil aus Nr. 5 $e + \varrho = r$ folgt, $LM < r$, woraus unmittelbar hervorgeht, dass $L$ innerhalb des grösseren Kreises liegt. Zieht man ebenso $LM$ und $LN$ in Fig. $\beta$, so ist $MN < LM + LN$, d. h. $r + \varrho < LM + \varrho$, also $r < LM$, woraus wieder folgt, dass $L$ ausserhalb des um $M$ beschriebenen Kreises liegt. Die Gleichungen 5) enthalten also die Bedingungen, unter denen sich zwei Kreise berühren.

Wenn umgekehrt zwei Kreise sich berühren, so liegen auch ihre Mittelpunkte und der Berührungspunkt auf einer und derselben Geraden und zugleich findet die eine oder andere der Gleichungen 5) statt. Wären nämlich in Fig. 87 $\gamma$ $M$ und $N$ die

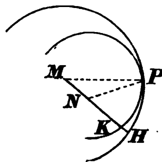


Fig. 87 $\gamma$.

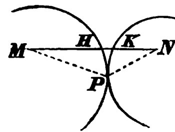


Fig. 87 $\delta$.

Kreismittelpunkte und es ginge die Centrale $MN$ nicht durch den Berührungspunkt $P$, so würde sie durch zwei andere Punkte $H$ und $K$ auf den Peripherien der Kreise gehen müssen, und nun hätte man $MH > MN + NK$, oder, wenn man statt $MH$ und $NK$ die Radien $MP$ und $NP$ setzt, $MP > MN + NP$, was aber unmöglich ist. Ebenso wäre in Fig. $\delta$ $MN > MH + NK$ oder $MN > MP + NP$, was ebenfalls unmöglich ist. Die

Centrale $MN$ muss also jedenfalls durch den Berührungspunkt $P$ gehen, wie in den Figuren $\alpha$ und $\beta$, und nun finden wie dort die Gleichungen $r - \varrho = e$ oder $r + \varrho = e$ statt, je nachdem die Berührung von innen oder von aussen geschieht.

Errichtet man im Berührungspunkte eine Senkrechte auf der Centrale, so ist diese die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise; bei einer innern Berührung liegen beide Kreise auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente, bei einer äussern Berührung auf entgegengesetzten Seiten.

III. Wenn endlich die Kreise zwei Punkte $A$ und $B$ gemein haben, so sind die beiden Hauptfälle zu unterscheiden, ob die Mittelpunkte $M$ und $N$ auf derselben Seite der Sekante $AB$ liegen, oder auf entgegengesetzten Seiten derselben (Fig. 88$\alpha$ und 88$\beta$).

Im ersten Falle ist

Fig. 88$\alpha$.

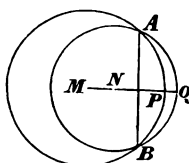
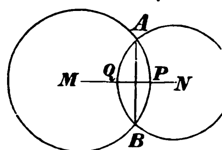



Fig. 88$\beta$.




$$MP + PQ = MN + NQ,$$

d. h.

$$r + PQ = e + \varrho,$$

oder

$$r - \varrho + PQ = e,$$

und wenn $PQ$ links weggelassen wird, so folgt

6) $$r - \varrho < e.$$

Ganz ähnlich haben wir in Fig. $\beta$

$$MP + NP = MN,$$

oder

$$MP + NQ - PQ = MN,$$

d. h.

$$r + \varrho - PQ = e$$

und, wenn wir links $PQ$ weglassen,

7) $$r + \varrho > e.$$

Den Übergang von dem einen zum anderen Hauptfalle bildet der specielle Fall, wo der Mittelpunkt $N$ des kleineren

Kreises auf der gemeinschaftlichen Sekante $AB$ selbst liegt. Es besteht dann zwischen $r$, $\varrho$ und $e$ die Gleichung

$$r^2 - \varrho^2 = e^2.$$

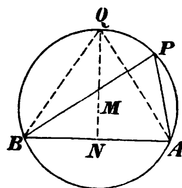
---

## Konstruktionen zu Kap. V.

1. Der Satz, dass alle über demselben Bogen oder über derselben Sehne (auf gleicher Seite der letzteren) stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind, giebt zu einer sehr brauchbaren Aufgabe Veranlassung, nämlich:

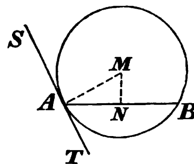
Einen Kreis zu beschreiben, wenn eine Sehne desselben und der über ihr stehende Peripheriewinkel gegeben sind. Halbiert man die Sehne $AB$ durch die auf ihr senkrechte Gerade $NQ$ und zieht $AQ$, $BQ$, so ist $\angle AQB = \angle APB$, also gleich dem gegebenen Peripheriewinkel $P$, ferner $\angle AQN = \frac{1}{2}P$ und $\angle NAQ = R - \frac{1}{2}P = NBQ$. Von dem Dreiecke $ABQ$ kennt man also eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (jeder $= R - \frac{1}{2}P$) und folglich ist dasselbe leicht zu konstruieren. Beschreibt man jetzt einen durch $A$, $B$ und $Q$ gehenden Kreis, so ist dies offenbar der gesuchte Kreis.

Fig. 89.




Eine zweite und kürzere Konstruktion ergiebt sich aus dem Satze II, $\alpha$) in § 25. Macht man nämlich $\angle BAT =$ dem gegebenen Peripheriewinkel $P$, so muss $AT$ eine Tangente des fraglichen Kreises sein; der Mittelpunkt derselben ist also einerseits auf einer Geraden $AM$ zu suchen, welche senkrecht auf $ST$ steht, andererseits auf einer Geraden $MN$, welche die Sehne senkrecht halbiert. Der Durchschnitt $M$ beider Geraden giebt daher den Mittelpunkt des gesuchten Kreises und $AM$ als dessen Halbmesser.

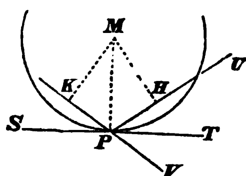
Fig. 90.




2. Durch einen gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu legen. Es sind hier zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich der gegebene Punkt auf der Peripherie des Kreises oder ausserhalb desselben liegt. Im ersten Falle hat man nur den Punkt $P$ mit dem

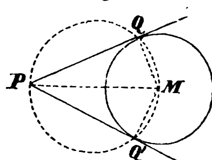
Kreismittelpunkte $M$ zu verbinden und auf dem so entstandenen Halbmesser $MP$ eine Senkrechte $PT$ im Punkte $P$ zu errichten.

Fig. 91.



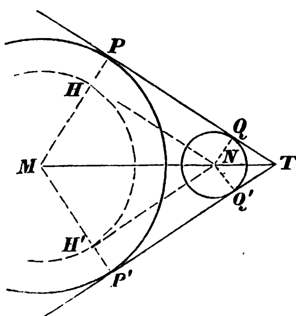

Im zweiten Falle kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck $MPQ$ zu konstruieren, welches die Gerade $MP$ zur Hypotenuse hat und dessen Spitze $Q$ auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt. Man erhält dasselbe leicht, wenn man über $MP$ als Durchmesser einen Kreis beschreibt, welcher den gegebenen Kreis in $Q$ schneidet; es ist dann $\angle PQM$ (als Winkel im Halbkreise) $= R$ und folglich $PQ$ die gesuchte Tangente. Da der Hilfskreis über $PQ$ den gegebenen Kreis zum zweiten Male in $Q'$ schneidet, so giebt es noch eine zweite Tangente $PQ'$. Aus der Kongruenz der Dreiecke $MPQ$ und $MPQ'$ folgt noch $PQ = PQ'$ und $\angle MPQ = \angle MPQ'$, so dass also $M$ auf der Halbierungslinie des Winkels $QPQ'$ liegt.

Fig. 92.




3. Die gemeinschaftliche Tangente zweier gegebenen Kreise zu finden. Sind die beiden mit den ungleichen Halbmessern $MP$ und $NQ$ beschriebenen Kreise gegeben und ist $PQT$ eine Gerade, welche sie beide berührt, so sind die Winkel $MPT$ und $NQT$ gleichzeitig rechte; wenn ferner $NH \parallel PQ$ gezogen wird, so ist auch $\angle MHN = R$, und man kann folglich $NH$ als Tangente eines mit dem Halbmesser $MH = MP - HP = MP - NQ$ beschriebenen Kreises ansehen. Dies führt unmittelbar zur folgenden Konstruktion: Man beschreibe aus dem Mittelpunkte $M$ des grösseren Kreises einen Hilfskreis, welcher die Differenz der gegebenen Halbmesser zum Radius hat, und lege an ihn vom Mittelpunkte $N$ des kleineren Kreises aus eine Tangente, deren Berührungspunkt $H$ sein möge. Verlängert man jetzt den Halbmesser $MH$ bis $P$ und zieht $PQ \parallel HN$, so ist $PQ$ die gesuchte Tangente. Da sich von $N$ aus zwei Tangenten an den Hilfs-

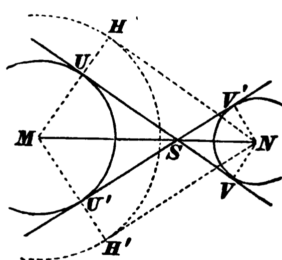
Fig. 93.



kreis legen lassen, so folgt, dass auf der anderen Seite von $MN$ noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente $P'Q'$ liegt, welche, wie leicht zu sehen ist, durch denselben Punkt $T$ der verlängerten Centrale geht.

Ausser den soeben gefundenen zwei gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise giebt es übrigens noch ein zweites Paar, wobei die Berührungspunkte nicht auf derselben Seite der Centrale (wie $P$ und $Q$ oberhalb), sondern auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, wie $U$ und $V$, oder $U'$, $V'$. Jene Berührungslinien ($PQ$ und $P'Q'$) nennt man die äusseren, diese ($UV$ und $U'V'$) die inneren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise. Man findet letztere, wenn man nicht mit der Differenz, sondern mit der Summe der gegebenen Halbmesser einen Hilfskreis beschreibt und dann wie vorhin verfährt, wovon die Gründe leicht genug einzusehen sind.

Fig. 94.




Die beiden Punkte $S$ und $T$, in welchen sich die inneren und äusseren gemeinschaftlichen Tangenten schneiden, heissen die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise; $S$ der innere, $T$ der äussere. Ihre Entfernungen vom Mittelpunkte des grösseren Kreises sind leicht zu finden, sobald die Halbmesser $MP = r$, $NQ = \varrho$ und die Centrale $MN = e$ gegeben sind. Für $MS = s$ und $MT = t$ ist nämlich

$$MH : MN = MU : MS,$$

d. i.

$$r + \varrho : e = r : s,$$

also

$$\alpha) \qquad s = \frac{er}{r + \varrho}.$$

Dem analog ist

$$MH : MN = MP : MT,$$

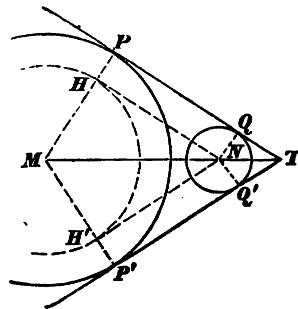
d. i.

$$r - \varrho : e = r : t,$$

folglich

$$\beta) \qquad t = \frac{er}{r - \varrho}.$$

Fig. 95.



Wenn sich die beiden Kreise von aussen berühren, so fallen die beiden inneren Tangenten zu einer einzigen zusammen und man hat dann nur noch drei gemeinschaftliche Tangenten; schneiden sich die Kreise, so giebt es gar keine inneren, sondern nur zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten; berühren sich die Kreise von innen, so bleibt nur eine äussere gemeinschaftliche Tangente übrig; liegt endlich der kleinere Kreis so innerhalb des grösseren, dass er keinen Punkt mit ihm gemein hat (Fig. 86 $\alpha$), so ist gar keine gemeinschaftliche Tangente vorhanden.

Zieht man überhaupt ein Paar parallele Radien $MP$ und $NQ$ oder $MU$ und $NQ$ und nennt $S'$ und $T'$ die Durchschnitte von $QU$ und $MN$ einerseits, sowie von $PQ$ und $MN$ andererseits, so hat man

Fig. 96.

$$MU : MS' = NQ : NS',$$

d. i.

$$r : MS' = \varrho : e - MS',$$

oder

$$\varrho MS' = r\,(e - MS'),$$

und hieraus findet man leicht

$$MS' = \frac{er}{r + \varrho}.$$

Ferner ist

$$MP : MT' = NQ : NT',$$

d. i.

$$r : MT' = \varrho : MT' - e,$$

oder

$$\varrho MT' = r\,(MT' - e),$$

woraus man erhält

$$MT' = \frac{er}{r - \varrho}.$$

Aus der Vergleichung dieser Formeln mit denen für $s$ und $t$ ergiebt sich augenblicklich, dass $S'$ und $T'$ die Ähnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise sind und dass man also den Satz aufstellen kann: Die Verbindungslinie der Endpunkte irgend zweier parallelen Halbmesser geht durch den inneren oder äusseren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise, je nachdem jene Endpunkte auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen oder nicht.

Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass, wenn man von einem Punkte $Q$ auf der Peripherie des einen Kreises die Ge-

raden $S'Q$ und $T'Q$ nach den Ähnlichkeitspunkten und nachher $MP$ und $MU$ zieht, notwendig $MP$ und ebenso $MU \parallel NQ$ sein muss.

4. Die Berührungsaufgaben. Verstehen wir unter dem Ausdrucke „einen Punkt berühren" dasselbe, wie unter den Worten „durch einen Punkt gehen", so giebt es folgendes allgemeines Problem:

Es sind von Punkten, Geraden und Kreisen in einer Ebene irgend drei gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher die bezeichneten drei Stücke berührt.

Diese Aufgabe enthält, wenn man alle einzelnen Fälle durchgeht, zehn besondere Probleme in sich; es können nämlich zugleich gegeben sein

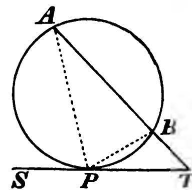
von den Kreisen: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3,
von den Geraden: 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 0, 1, 0,
von den Punkten: 3, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0.

Die Lösungen dieser Aufgaben wollen wir mit kurzen, aber wohl genügenden Worten andeuten.

I. Durch drei Punkte einen Kreis zu beschreiben ist bereits in § 24 II, *b*, *α* gelehrt worden.

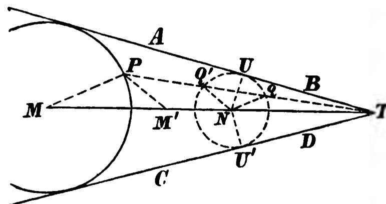
II. Gegeben zwei Punkte $A$, $B$ und eine Gerade $ST$. Zieht man $AB$, bis sie $ST$ in $T$ schneidet und ist $P$ der (noch unbekannte) Berührungspunkt, so muss $\overline{TP}^2 = TA.TB$ sein; man findet also $P$, wenn man $TP = \sqrt{TA.TB}$ konstruiert und von $T$ aus abschneidet.

Fig. 97.




III. Gegeben zwei Gerade $AB$, $CD$ und ein Punkt $P$. Schneiden sich die Geraden in $T$, so muss der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Halbierungslinie $TN$ des Winkels $ATC$ liegen, denn jeder beliebige Punkt derselben, wie z. B. $N$, hat von $AB$ und $CD$ gleiche Entfernung $NU = NU'$. Konstruiert man mit $NU$ einen Hilfskreis, so muss weiter $T$ der äussere Ähnlichkeitspunkt des Hilfskreises und des gesuchten Kreises sein; zieht man also $PT$

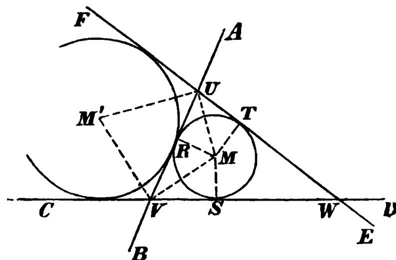
Fig. 98.



welche den Hilfskreis in $Q$ und $Q'$ schneidet, und dann $PM \parallel QN$, so erhält man den Mittelpunkt $M$ und Halbmesser des gesuchten Kreises. Legt man dagegen $PM' \parallel Q'N$, so erhält man einen zweiten Kreis aus dem Mittelpunkte $M'$ mit dem Halbmesser $M'P$, welcher gleichfalls das Verlangte leistet.

IV. Es sind drei Gerade gegeben $AB$, $CD$, $EF$; ihre Durchschnitte seien $U$, $V$ und $W$. Da der gesuchte Kreis die Geraden $UV$ und $UW$ berühren soll, so muss sein Mittelpunkt auf der Halbierungslinie des Winkels $VUW$ liegen; weil ferner der Kreis auch $UV$ und $VW$ berühren soll, so muss sein Centrum ebenso auf der Halbierungslinie des Winkels $UVW$ liegen; der Durchschnitt $M$ beider Halbierungslinien ist daher der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und sein Halbmesser gleich der Senkrechten $MR$ von $M$ auf $UV$, wobei $MR = MS = MT$.

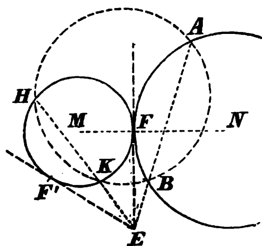
Fig. 99.




Halbiert man ebenso die Winkel $VUF$ und $UVC$, so führt der Durchschnitt $M'$ derselben auf ähnliche Weise zu einem zweiten Kreise, welcher ebenfalls der Aufgabe genügt; überhaupt giebt es im ganzen vier verschiedene Kreise, welche die gegebenen drei Geraden berühren.

V. Gegeben ein Kreis um $M$ und zwei Punkte $A$ und $B$. Wäre der gesuchte Kreis, welcher durch $A$ und $B$ gehen und den gegebenen Kreis berühren soll, schon gefunden, so würden sich die gemeinschaftliche innere Tangente beider Kreise und die nötigenfalls verlängerte Gerade $AB$ in einem Punkte $E$ so schneiden, dass $\overline{EF}^2 = EA \cdot EB$ wäre. Zieht man ausserdem durch $E$ eine beliebige Gerade, welche den gegebenen Kreis in $H$ und $K$ schneidet, so ist auch $\overline{EF}^2 = EH \cdot EK$, mithin $EA \cdot EB = EH \cdot EK$, woraus folgt, dass die vier Punkte $A$, $B$, $H$, $K$ auf der Peripherie eines neuen Kreises liegen (§ 24 II, $b$, $\beta$). Dies führt unmittelbar

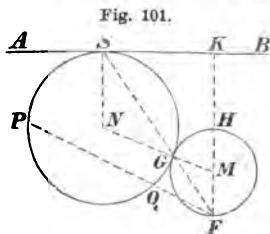
Fig 100.



zu folgender Konstruktion: Man beschreibe einen durch $A$ und $B$ gehenden Hilfskreis, welcher den gegebenen Kreis in $H$ und $K$ schneidet; von dem Durchschnittspunkte $E$ der Geraden $AB$ und $HK$ aus lege man eine Tangente $EF$ an den um $M$ beschriebenen Kreis, so ist der durch $A$, $B$ und $F$ gehende Kreis der gesuchte. Da man von $E$ aus zwei Tangenten $EF$ und $EF'$ an den gegebenen Kreis ziehen kann, so giebt es zwei Kreise, welche der Aufgabe genügen; der eine berührt den gegebenen Kreis von aussen, der andere von innen.

VI. Gegeben ein Kreis um $M$, eine Gerade $AB$ und ein Punkt $P$. Wäre der gesuchte Kreis schon gefunden, $N$ sein Mittelpunkt, und sind $FMK$ und $NS$ senkrecht auf $AB$, so laufen die Halbmesser $MF$ und $NS$ parallel und mithin geht die Gerade $FS$ durch den innern Ähnlichkeitspunkt, hier den Berührungspunkt, beider Kreise. Nun ist $\triangle FGH \sim \triangle FKS$, mithin $FG : FH = FK : FS$ oder $FH . FK = FG . FS$; ausserdem ist aber, wenn $FP$ gezogen wird, $FP . FQ = FG . FS$, folglich $FP . FQ$ auch gleich $FH . FK$ endlich $FQ = \frac{FH . FK}{FP}$.

Fig. 101.

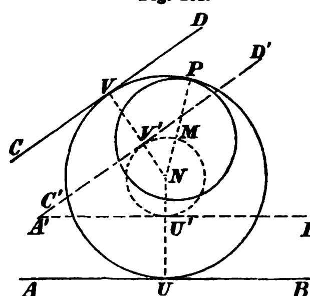



Dies führt zu folgender Konstruktion: Man ziehe die Gerade $FMHK$ senkrecht auf $AB$, verbinde $F$ mit $P$ und schneide auf $FP$ das Stück $FQ = \frac{FH . FK}{FP}$ ab, konstruiere endlich den Kreis, welcher $P$, $Q$ und $AB$ berührt (nach Nr. II), so ist dieser der gesuchte Kreis.

VII. Gegeben ein Kreis um $M$ und zwei Gerade $AB$ und $CD$. Es sei $N$ der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und $NU = NV$ sein Halbmesser; wir beschreiben aus $N$ mit $NM$ als Halbmesser einen mit ihm konzentrischen Kreis und legen durch die Punkte $U'$ und $V'$, in welchen derselbe die Senkrechten $NU$ und $NV$ schneidet, ein Paar Gerade $A'B' \parallel AB$ und $C'D' \parallel CD$; dann berührt der neue Kreis offenbar diese Geraden; zugleich ist $UU' = NU - NU' = NP - NM = MP$, d. i. gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises, und $VV'$ ebenfalls $= MP$. Dies giebt folgende Konstruktion: Man ziehe

$A'B' \parallel AB$ und $C'D' \parallel CD$ so, dass die jedesmalige Entfernung der beiden Parallelen dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich ist, und beschreibe darauf einen Hilfskreis, welcher die Geraden $A'B'$, $C'D'$ und den Punkt $M$ berührt (nach Nr. III); der gesuchte Kreis ist dann mit dem Hilfskreise konzentrisch und sein Halbmesser um den Radius des gegebenen Kreises grösser als der Halbmesser des Hilfskreises. Da die Aufgabe III, welche hier benutzt wird, zwei Auflösungen besitzt, so giebt es auch hier zwei Kreise, welche den obigen Bedingungen genügen.

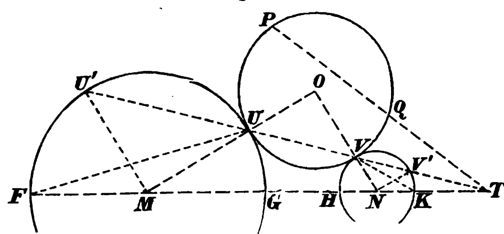
Fig. 102.




Zieht man die Parallelen $A'B'$ und $C'D'$ nicht innerhalb, sondern ausserhalb des von $AB$ und $CD$ gebildeten Winkels, so ist der Halbmesser des gesuchten Kreises nicht grösser, sondern um ebensoviel wie vorhin kleiner als der Halbmesser des Hilfskreises, und man erhält dann diejenigen zwei Kreise, welche den gegebenen Kreis, nicht wie vorhin von innen, sondern von aussen berühren. Die Aufgabe hat also im ganzen vier Auflösungen.

VIII. **Gegeben zwei Kreise um $M$ und $N$ und ein Punkt $P$.** Hätte man schon den gesuchten aus $O$ beschriebenen Kreis, welcher durch $P$ ginge und die gegebenen

Fig. 103.



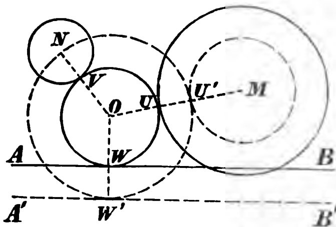

Kreise in $U$ und $V$ berührte, so wäre, wenn $UV$ bis zum Durchschnitte $T$ mit $MN$ verlängert und $TP$ gezogen wird, $TP . TQ = TU . TV$. Zieht man noch $MU'$ und $NV'$, so ist $\angle MU'U = \angle MUU' = \angle OUV = \angle UVO = \angle NVV'$, woraus hervorgeht, dass die Halbmesser $MU'$ und $NV$ parallel laufen,

mithin $T$ der Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise ist. Weiter ist nun auch $MU \parallel NV'$, mithin $\angle GMU = \angle KNV'$, und ebenso sind die Hälften dieser Winkel, nämlich die Peripheriewinkel $MFU$ und $KVV'$, einander gleich; daraus folgt $\triangle TFU \sim \triangle TVK$, mithin $TF:TU = TV:TK$ oder $TU.TV = TF.TK$ und mit der früheren Gleichung zusammengehalten $TP.TQ = TF.TK$ oder $TQ = \frac{TF.TK}{TP}$. Dies giebt folgende Konstruktion: Von dem äusseren Ähnlichkeitspunkte $T$ der gegebenen Kreise aus ziehe man $TP$ und bestimme den Punkt $Q$ so, dass $TQ = \frac{TF.TK}{TP}$; man beschreibe darauf nach Nr. V einen Kreis, welcher die Punkte $P$, $Q$ und einen der gegebenen Kreise berührt, so hat man den gesuchten Kreis. Da die Aufgabe Nr. V zwei Auflösungen hat, so giebt es noch einen zweiten derartigen Kreis, welcher nämlich die beiden gegebenen Kreise von innen berührt.

Verfährt man ebenso mit dem innern Ähnlichkeitspunkte $S$, indem man aber $SQ$ auf der Rückwärtsverlängerung von $SP$ abschneidet, so erhält man diejenigen zwei Kreise, welche den einen der gegebenen Kreise von aussen und den andern von innen berühren. Die Aufgabe hat also im ganzen vier Auflösungen.

IX. G e g e b e n z w e i K r e i s e u m $M$ u n d $N$ u n d e i n e G e r a d e $AB$. Der gesuchte Kreis berühre die gegebenen Stücke in $U$, $V$, $W$; beschreibt man aus seinem Mittelpunkte $O$ mit $ON$ als Halbmesser einen Kreis, welcher den Radius $MU$ in $U'$ und die verlängerte $OW$ in $W'$ schneidet, so berührt dieser neue Kreis offenbar einen aus $M$ mit $MU'$ als Halbmesser konstruierten Kreis und eine durch $W'$ parallel zu $AB$ gezogene Gerade $A'B'$. Dabei ist $MU' = MU - UU' = MU - NV$, also gleich der Halbmesserdifferenz, und $WW' = NV$. Dies giebt folgende Konstruktion: Aus $M$ beschreibe man einen Hilfskreis mit dem Halbmesser $MU' = MU - NV$, zu $AB$ ziehe man in der Entfernung

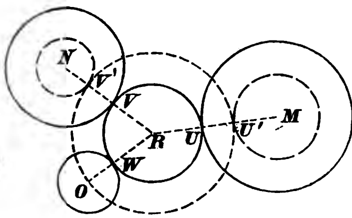
Fig. 104.



$WW' = NV$ eine Parallele und beschreibe nach Nr. VI einen zweiten Hilfskreis, welcher den ersten Hilfskreis, die Parallele $A'B'$ und den Punkt $N$ berührt. Der gesuchte Kreis ist mit diesem zweiten Hilfskreise konzentrisch und sein Halbmesser um den Radius des kleinern gegebenen Kreises kürzer, als der Halbmesser des zweiten Hilfskreises. Beschreibt man den ersten Hilfskreis mit der Summe der Radien statt mit der Differenz, so erhält man einen Kreis, welcher den einen gegebenen Kreis von aussen und den andern von innen berührt. Legt man die Parallele $A'B'$ auf die entgegengesetzte Seite von $AB$ und beschreibt einmal mit der Differenz und dann mit der Summe der gegebenen Radien den ersten Hilfskreis, so entstehen wieder zwei neue Kreise, so dass es also im ganzen vier Auflösungen giebt.

X. Gegeben drei Kreise um $M$, $N$ und $O$. Der gesuchte Kreis habe $R$ zum Mittelpunkte und berühre die gegebenen Kreise in $U$, $V$ und $W$. Beschreibt man mit dem Halbmesser $RO$, wo $O$ der Mittelpunkt des kleinsten Kreises ist, einen Hilfskreis, welcher $MR$ und $NR$ in $U'$ und $V'$ schneidet, so berührt dieser Hilfskreis diejenigen zwei Kreise, welche man aus $M$ und $N$ mit den Halbmessern $MU'$ und $NV'$ konstruieren kann. Berücksichtigt man, dass hierbei $MU' = MU - UU' = MU - OW$ und $NV' = NV - VV' = NV - OW$ ist, so hat man folgende Konstruktion: Aus $M$ und $N$ beschreibe man zwei Hilfskreise mit den Halbmesserdifferenzen $MU - OW$ und $NV - OW$, darauf einen dritten Hilfskreis, welcher die beiden ersten Hilfskreise berührt und durch den Punkt $O$ geht; der gesuchte Kreis ist mit dem dritten Hilfskreise konzentrisch und sein Radius um $OW$ kleiner als der Halbmesser des letzteren. Berührt der dritte Hilfskreis die zwei ersten Hilfskreise von aussen, so berührt auch der gesuchte Kreis alle drei gegebenen Kreise von aussen; berührt dagegen der dritte Hilfskreis die zwei ersten Hilfskreise von innen, so berührt auch der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise von innen, nur ist in diesem Falle sein

Fig. 105.



Halbmesser um $OW$ grösser als der Radius des dritten Hilfskreises.

Im ganzen hat die Aufgabe acht Auflösungen, weil der gesuchte Kreis die drei gegebenen Kreise entweder sämtlich von aussen oder sämtlich von innen, oder zwei der gegebenen Kreise von aussen und einen von innen, oder einen von aussen und zwei von innen berühren kann; für die hier nicht besonders erörterten Fälle gilt eine ganz ähnliche Betrachtung und Konstruktion, die man vermöge der Bemerkung leicht finden wird, dass die ersten zwei Hilfskreise statt mit den Halbmesserdifferenzen unter Umständen auch mit den Halbmessersummen beschrieben werden können.

---

## Kap. VI.

# Die Sehnen- und Tangentenvielecke.

---

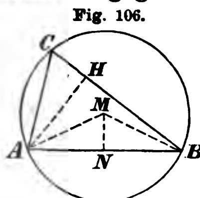
### § 27.

### Das Sehnen- und Tangentendreieck.

Nachdem wir uns mit einzelnen Sehnen und Tangenten eines Kreises beschäftigt haben, untersuchen wir solche Sehnen und Tangenten, welche in ihrer Aufeinanderfolge ein Vieleck bilden; ist dieses Vieleck derart, dass alle seine Seiten Sehnen eines und desselben Kreises sind, so sagt man, dass Vieleck sei in den Kreis beschrieben oder nennt es kurz ein Sehnenvieleck; sind dagegen alle Seiten des Vielecks Tangenten eines und desselben Kreises, so sagt man, das Vieleck sei um den Kreis beschrieben oder nennt es ein Tangentenvieleck. Von dem Kreise endlich kann man sagen, dass er um das Sehnenvieleck und in das Tangentenvieleck beschrieben sei. Die Untersuchung über derartige Vielecke beginnen wir mit dem einfachsten aller Vielecke, nämlich dem Dreiecke.

I. Es sei $ABC$ ein Sehnendreieck, dessen Seiten als in Zahlen gegeben vorausgesetzt werden: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$. Man findet dann eine Beziehung zwischen den Seiten des Dreiecks und dem umschriebenen Kreise auf folgendem Wege. Wenn $AH$ senkrecht auf $BC$ und $MN$ senkrecht auf $AB$ ist, so haben wir $\angle C = \angle AMN$ (§ 23) und $\angle AHC = \angle ANM = R$, woraus die Ähnlichkeit der Dreiecke $ACH$ und $AMN$ folgt. Dies giebt

Fig. 106.




$$AH : AC = AN : AM,$$

d. i. wenn wir den Halbmesser $AM$ mit $r$ bezeichnen,

$$AH : b = \tfrac{1}{2}a : r$$

oder

$$r = \frac{ab}{2 . AH}.$$

Die Linie $AH$ ist leicht zu berechnen, wenn man berücksichtigt, dass die Fläche des Dreiecks, welche $\Delta$ heissen möge, $= \frac{1}{2} BC . AH = \frac{1}{2} c . AH$ und mithin $AH = \frac{2\Delta}{c}$ sein muss. Es wird dann

1) $$r = \frac{abc}{4\Delta}$$

oder wenn man für $\Delta$ seinen Wert setzt (§ 17),

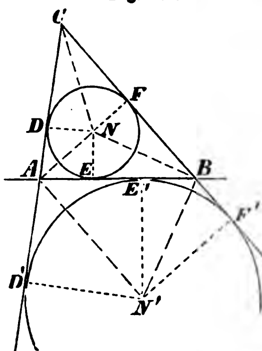
2) $$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Sind $a$, $b$ und $c$ gegeben, so lässt sich nach Formel 1) jederzeit der Radius $r$ finden, d. h., jedes beliebige Dreieck kann als ein Sehnendreieck angesehen werden. Der so auf dem Wege der Rechnung gefundene Satz ist übrigens von dem in § 24 II, *a)* entwickelten Theoreme nicht wesentlich verschieden.

II. Es seien $AB = a$, $AC = b$ und $BC = c$ die Seiten eines Tangentendreiecks und $\varrho$ der Radius des eingeschriebenen Kreises. Ziehen wir nach den Berührungspunkten die Halbmesser $DN$, $EN$, $FN$ und ausserdem nach den Ecken die Geraden $AN$, $BN$, $CN$, so sind $DN = EN = FN = \varrho$ die Höhen der Dreiecke $ANC$, $ANB$ und $BNC$. Nennen wir

wieder $\Delta$ die Fläche des Dreiecks $ABC$, so ist offenbar $\Delta$ gleich der Summe der Flächen von den Dreiecken $ANB$, $ANC$ und $BNC$, d. h.

Fig. 107.




$$\Delta = \tfrac{1}{2}a\varrho + \tfrac{1}{2}b\varrho + \tfrac{1}{2}c\varrho$$
$$= \tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\varrho;$$

man findet daraus

$$3)\qquad \varrho = \frac{2\Delta}{a+b+c},$$

wo man wieder für $\Delta$ seinen Wert, ausgedrückt durch $a$, $b$ und $c$, setzen könnte. Sind $a$, $b$ und $c$ gegeben, so findet man immer hiernach den Wert von $\varrho$, d. h. jedes Dreieck kann als ein Tangentendreieck angesehen werden. [Man vergleiche hiermit die Aufgabe IV, 4) im Anhange zum vorigen Kapitel.]

Betrachtet man dagegen $ABC$ als Tangentendreieck zu einem Kreise, welcher $AB$ selbst in $E'$ und die Verlängerungen von $AC$ und $BC$ in $D'$ und $F'$ berührt, so ist die Fläche des Dreiecks $ABC$ gleich der Summe der Flächen von $AN'C$ und $BN'C$ weniger der Fläche von $AN'B$, d. h., für $D'N' = E'N' = F'N' = \varrho_a$ hat man

$$\Delta = \tfrac{1}{2}b\varrho_a + \tfrac{1}{2}c\varrho_a - \tfrac{1}{2}a\varrho_a,$$

woraus folgt

$$4)\qquad \varrho_a = \frac{2\Delta}{b+c-a}.$$

Für den Halbmesser $\varrho_b$ desjenigen Kreises; welcher $b$ selbst, dagegen von $a$ und $c$ die Verlängerungen berührt, ist ähnlich

$$5)\qquad \varrho_b = \frac{2\Delta}{a+c-b}$$

und für den Halbmesser $\varrho_c$ des Kreises, welcher $c$ selbst und von $a$ und $b$ die Verlängerungen berührt,

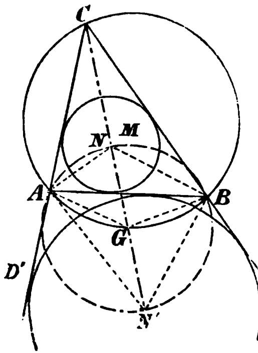
$$6)\qquad \varrho_c = \frac{2\Delta}{a+b-c}.$$

Aus den Formeln 4), 5), 6) kann man verschiedene Beziehungen zwischen den vier Halbmessern $\varrho$, $\varrho_a$, $\varrho_b$, $\varrho_c$ herleiten, z. B.

$$7)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}.$$

III. Betrachten wir endlich ein beliebiges Dreieck $ABC$, insofern es zugleich Sehnen- und Tangentendreieck ist. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises sei $M$, der des eingeschriebenen $N$. Ziehen wir $AN$ und $CN$, so halbiert die erste dieser Geraden den Winkel $A$, die zweite den Winkel $C$; verlängern wir $CN$ bis zum Durchschnitte $G$ mit dem umschriebenen Kreise, so muss $arc\, AG = arc\, BG$ sein, weil gleichen Peripheriewinkeln ($\angle ACN$ und $\angle BCN$) gleiche Bögen entsprechen. Ziehen wir ferner $AG$, so ist $\angle BAG = \angle BCG$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. In dem Dreiecke $ANC$ ist nun der Aussenwinkel

Fig. 108.




$$\angle ANG = \angle ACN + \angle CAN,$$

folglich wegen $\angle ACN = \angle BCG = \angle BAG$ und wegen $\angle CAN = \angle BAN$

$$\angle ANG = \angle BAG + \angle BAN = \angle GAN.$$

Das Dreieck $AGN$ ist demnach gleichschenklig und zwar $GA = GN$. Ebenso lässt sich zeigen, dass $GB = GN$ sein muss, dass mithin $GA$, $GN$, $GB$ als Radien eines aus $G$ mit dem Halbmesser $GA$ beschriebenen Kreises angesehen werden dürfen. Diese Schlüsse gelten, wie leicht zu sehen ist, auch umgekehrt und liefern ein neues Verfahren, um den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zu finden, wenn der umschriebene Kreis schon konstruiert ist. Man halbiert nämlich den Bogen $AB$ in $G$, zieht $CG$ und beschreibt mit der Sehne $GA$ als Halbmesser aus $G$ einen Kreis, so ist der Durchschnittspunkt desselben mit $CG$ der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und das Perpendikel von $N$ auf irgend eine Dreiecksseite der Halbmesser. Denn wegen $arc\, GA = arc\, GB$ hat man $\angle ACG = \angle BCG = \angle BAG$, und wegen $GN = GA$, $\angle GNA = \angle GAN$ d. i. $\angle ACN + \angle CAN = \angle BAG + \angle BAN$, mithin $\angle CAN = \angle BAN$.

Verlängert man $CG$ bis zum zweiten Durchschnittspunkte $N'$, so ist dieser der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher

$AB$ selbst und von $AC$, $BC$ die Verlängerungen berührt. Wegen $GA = GN'$ ist nämlich $\angle GN'A = \angle GAN'$; ferner hat man $\angle D'AN' = \angle D'CN' + \angle AN'C = \angle BAG + \angle GAN' = \angle BAN'$, so dass also $N'$ der Durchschnitt der Winkelhalbierungslinien $CN'$ und $AN'$ ist, wie es sein muss.

Fig. 109.

Suchen wir endlich noch eine Formel für die Entfernung der Mittelpunkte $M$ und $N$ oder $M$ und $N'$ zu gewinnen, wobei $MG = r$, $NE = \varrho$, $N'E' = \varrho'$, $MN = e$ und $MN' = e'$ sein möge. Werden $NH$ und $N'H' \parallel AB$ gezogen, so ist

$$\overline{MN}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{NH}^2,$$

d. i.

$$e^2 = (r - GH)^2 + \overline{GN}^2 - \overline{GH}^2$$
$$= r^2 - 2r.GH + \overline{GN}^2.$$

Verlängern wir $GM$ bis $K$ und ziehen $AK$, so ist weiter

$$\overline{GN}^2 = \overline{GA}^2 = GK.GP = 2r.GP,$$

mithin

$$e^2 = r^2 - 2r.GH + 2r.GP$$
$$= r^2 - 2r(GH - GP)$$

oder, weil $GH - GP = HP = NE = \varrho$ ist,

9) $$e^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

Ferner hat man in dem rechtwinkligen Dreiecke $MH'N'$

$$\overline{MN'}^2 = \overline{MH'}^2 + \overline{N'H'}^2,$$

d. i.

$$e'^2 = (r + GH')^2 + \overline{GN'}^2 - \overline{GH'}^2$$
$$= r^2 + 2r.GH' + \overline{GN'}^2.$$

Weiter ist nun

$$\overline{GN'}^2 = \overline{GA}^2 = GK.GP = 2r.GP,$$

mithin

$$e'^2 = r^2 + 2r.GH' + 2r.GP$$
$$= e^2 - 2r(GH' + GP)$$

oder, weil $GH' + GP = H'P = N'E' = \varrho'$ ist,

10) $$e'^2 = r^2 + 2r\varrho',$$

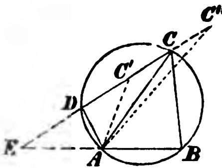
wobei man für $\varrho'$ der Reihe nach die Halbmesser $\varrho_a$, $\varrho_b$ und $\varrho_c$ zu setzen hat.

§ 28.

## Das Sehnenviereck.

*a)* Ziehen wir in dem Sehnenviereck $ABCD$ die Diagonale $BD$, so sind die Viereckswinkel $A$ und $C$ Peripheriewinkel auf entgegengesetzten Seiten der Sehne $BD$; nach § 23 folgt hieraus, dass $\angle A + \angle C = 2R$ ist. Andererseits ist $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R$ und mithin durch Subtraktion des vorigen $\angle B + \angle D = 2R$; d. h.: **Die Summe je zweier Gegenwinkel eines Sehnenvierecks beträgt zwei Rechte.** Man könnte diesen Satz auch so fassen: **Jeder Innenwinkel eines Sehnenvierecks ist gleich dem Aussenwinkel an der Gegenecke.**

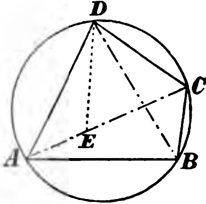
Fig. 110.




Es ist leicht zu sehen, dass sich dieser Satz auch umkehren lässt, denn wenn in einem Vierecke ($ABCD$) $\angle A + \angle C = 2R$ ist und man beschreibt durch $A$, $B$ und $D$ einen Kreis, so geht derselbe entweder durch $C$ oder nicht, in welchem letzteren Falle er die Gerade $CD$ in einem anderen Punkte $C'$ oder $C''$ schneiden müsste. Dann wäre $ABC'D$ oder $ABC''D$ ein Sehnenviereck und $\angle A + \angle C' = 2R$ oder $\angle A + \angle C'' = 2R$. Dies verträgt sich aber mit der Voraussetzung $\angle A + \angle C = 2R$ solange nicht, als $C'$ oder $C''$ von $C$ verschieden ist (weil weder $\angle C' = \angle C$ noch $\angle C'' = \angle C$ sein kann), und mithin muss der durch $A$, $B$ und $D$ gezogene Kreis auch durch $C$ gehen. — Diese Umkehrung des Satzes liefert ein Kennzeichen, wonach man sicher beurteilen kann, um welche Vierecke sich ein Kreis beschreiben lässt (z. B. Rechteck, Quadrat), und um welche nicht (z. B. Rhombus).

*b)* Ziehen wir in dem Sehnenvierecke $ABCD$ beide Diagonalen $AC$ und $BD$, so ist $\angle CAD = \angle CBD$ (als Peripheriewinkel), und wenn man jetzt $\angle ADE = \angle BDC$ macht, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke $AED$ und $BCD$. Ferner ist $\angle ABD = \angle ECD$, und da durch die eben erwähnte Konstruktion offenbar $\angle ADB = \angle EDC$ geworden ist, auch $\triangle ABD \sim \triangle ECD$. Dies giebt nachstehende Folgerungen: Wegen $\triangle AED \sim \triangle BCD$ ist

Fig. 111.



$$AE : AD = BC : BD,$$

oder

$$AE . BD = BC . AD.$$

Ferner ist wegen $\triangle ECD \sim \triangle ABD$

$$EC : CD = AB : BD,$$

oder

$$EC . BD = AB . CD.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(AE + EC)\, BD = AB . CD + BC . AD,$$

oder

$$AC . BD = AB . CD + BC . AD.$$

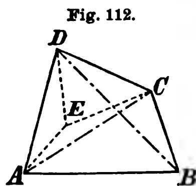
Bezeichnen wir die Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ der Reihe nach mit $a$, $b$, $c$, $d$ und die Diagonalen $AC$, $BD$ mit $f$, $g$, so nimmt die vorige Gleichung die übersichtlichere Form an:

1) $$fg = ac + bd,$$

d. h.: In jedem Sehnenvierecke ist das Produkt aus den Längenzahlen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den Längenzahlen der Gegenseiten. Dies ist der sogenannte Ptolemäische Lehrsatz, von welchem der Pythagoräische einen besonderen Fall ausmacht; für ein Rechteck wird nämlich $c = a$, $d = b$, $g = f$ und $f^2 = a^2 + b^2$.

Versucht man es, das Verfahren, mittelst dessen wir zur Gleichung 1) gekommen sind, auf ein dem Kreise nicht eingeschriebenes, mit konkaven Winkeln versehenes Viereck $ABCD$ anzuwenden, wo nun aber $\angle DAC$ nicht $= \angle DBC$ ist, so kann man doch $\angle DAE = \angle DBC$ und $\angle ADE = \angle BDC$ machen und dann bleiben die oben aufgestellten Proportionen buchstäblich dieselben. Man findet auch wieder

Fig. 112.




$$(AE + EC)\, BD = AB . CD + BC . AD,$$

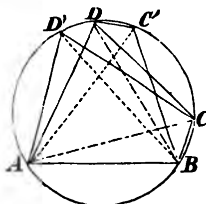
nur mit dem Unterschiede, dass hier die Punkte $A$, $E$ und $C$ nicht in einer Geraden liegen. Behält man dieselben Buchstaben wie oben bei, so ist $AE + EC$ nicht gleich $f$, sondern grösser als $f$, und wenn wir daher statt $AE + EC$ das kleinere $f$ setzen, so ist jetzt

$$fg < ac + bd.$$

Hieraus folgt, dass der Ptolemäische Satz nur für das Sehnenviereck gilt und dass umgekehrt ein Viereck, worin $fg = ac + bd$ ist, notwendig ein Sehnenviereck sein muss.

*c)* Vertauscht man auf alle mögliche Weise die Seiten eines Sehnenviereckes untereinander, indem man (s. Fig. 113) einmal $AD' = CD$ und $AD = CD'$, das andere Mal $BC' = DC$ und $BC = DC'$ macht, so entstehen noch zwei neue Sehnenvierecke $ABCD'$ und $ABC'D$*, von denen jedes mit dem ursprünglichen Vierecke eine Diagonale gemein hat, jenes $AC$, dieses $BD$; zieht man die zwei übrigen Diagonalen $AC'$ und $BD'$, so sind diese einander gleich, weil $BC' = CD = AD'$ genommen wurde. Wendet man auf jedes der neuen Vierecke den Ptolemäischen Satz an, so ergeben sich die Beziehungen

Fig. 113.




$$AC.BD' = AB.CD' + BC.AD',$$
$$AC'.BD = AB.C'D + BC'.AD,$$

d. i., wenn die gleichen Linien berücksichtigt werden und $AC' = BD' = h$ gesetzt wird,

$$2)\qquad fh = ad + bc,$$
$$3)\qquad hg = ab + cd;$$

durch Division beider Gleichungen folgt

---

* Dass man in der That durch fernere Seitenvertauschungen keine neuen Vierecke weiter erhalten würde, sieht man so. Die möglichen Vertauschungen wären vollständig:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *c* | | | *d* | | | *b* | |
| *d* | | *b* | *b* | | *c* | *d* | | *c* |
| | *a* | | | *a* | | | *a* | |
| | *c* | | | *d* | | | *b* | |
| *b* | | *d* | *c* | | *b* | *c* | | *d* |
| | *a* | | | *a* | | | *a* | |

Die untereinander stehenden Schemata würden aber zu kongruenten Vierecken führen; wendet man z. B. das nach dem Schema

| | | |
|---|---|---|
| | *d* | |
| *b* | | *c* |
| | *a* | |

gebildete Viereck um, so wird die linke Seite zur rechten und die rechte zur linken; dadurch wird das fragliche Viereck mit dem Vierecke

| | | |
|---|---|---|
| | *d* | |
| *c* | | *b* |
| | *a* | |

einerlei, so dass nur drei wirklich verschiedene Vierecke übrig bleiben.

$$4)\qquad \frac{f}{g} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

womit eine Formel für den Quotienten der Diagonalen $f$ und $g$ gewonnen ist, während der Ptolemäische Satz eine Formel für das Produkt derselben darstellt.

Multipliziert man die Gleichungen 1) und 4), so wird

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

und nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$5)\qquad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Durch Division mit Nr. 4 in Nr. 1 erhält man ähnlich eine Gleichung für $g^2$ und daraus

$$6)\qquad g = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

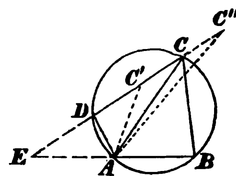
Substituiert man endlich den Wert von $f$ in Nr. 2 oder den von $g$ in Nr. 3, so findet man noch

$$7)\qquad h = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}},$$

womit nun alle drei möglichen Diagonalen bestimmt sind.

*d)* Um die Fläche des Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten zu berechnen, verlängern wir die Gegenseiten $AB$ und $CD$ bis zu ihrem Durchschnittspunkte $E$ und betrachten die ähnlichen Dreiecke $ADE$ und $CBE$, wobei $BE = x$ und $CE = y$ sein möge. Es ist dann

Fig. 114.




$$AD : AE = CB : CE,$$

d. h.

$$d : x - a = b : y$$

und folglich, wenn man das Produkt der inneren und äusseren Glieder entwickelt,

$$bx - ab = dy$$

oder

$$8)\qquad bx - dy = ab.$$

Ebenso hat man die Proportion

$$AD : DE = CB : BE$$

d. i.

$$d : y - c = b : x$$

und hieraus

$$by - bc = dx$$

oder

9) $$by - dx = bc.$$

Durch Addition der Gleichungen 8) und 9) ergiebt sich unter der Rücksicht, dass $bx + by - dx - dy = (b - d)(x + y)$ ist,

10) $$x + y = b\frac{a + c}{b - d}$$

und auf ganz ähnliche Weise durch Subtraktion

11) $$x - y = b\frac{a - c}{b + d}.$$

Aus 10) und 11) könnte man $x$ und $y$ leicht finden, doch ist dies für unseren nächsten Zweck nicht notwendig. Berechnen wir die Fläche des Dreiecks $BCE$ aus seinen drei Seiten $BE = x$, $CE = y$, $BC = b$, so haben wir

$$\triangle BCE = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x + y + b)(x + y - b)(x + b - y)(b + y - x)},$$

und hier ist vermöge der Werte von $x + y$ und $x - y$

$$x + y + b = b\frac{a + c}{b - d} + b = \frac{b}{b - d}(a + c + b - d),$$

$$x + y - b = b\frac{a + c}{b - d} - b = \frac{b}{b - d}(a + c - b + d),$$

$$b + x - y = b + b\frac{a - c}{b + d} = \frac{b}{b + d}(b + d + a - c),$$

$$b + y - x = b - b\frac{a - c}{b + d} = \frac{b}{b + d}(b + d - a + c).$$

Substituieren wir diese Ausdrücke und ordnen die einzelnen Faktoren, so wird, nachdem die Wurzel, wo es geht, ausgezogen ist,

$$\triangle BCE = \frac{1}{4}\frac{b^2}{b^2-d^2}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}$$

oder, wenn die Wurzelgrösse zur Abkürzung mit $W$ bezeichnet wird,

12) $$\triangle BCE = \frac{1}{4}\frac{b^2}{b^2-d^2}W.$$

Da sich die Flächen ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, so ist weiter

$$\triangle BCE : \triangle DAE = b^2 : d^2$$

oder

$$\triangle DAE = \frac{d^2}{b^2}\triangle BCE,$$

und wenn man für die Fläche von $BCE$ den in Nr. 12 gefundenen Wert setzt,

$$\triangle DAE = \frac{1}{4}\frac{d^2}{b^2-d^2}W.$$

Die Fläche des Vierecks $ABCD$, welche $V$ heissen möge, ist nun $= \triangle BCE - \triangle DAE$, folglich

$$V = \frac{1}{4}\frac{b^2-d^2}{b^2-d^2}W = \frac{1}{4}W,$$

oder vermöge der Bedeutung von $W$

13) $$V = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Bezeichnen wir ähnlich wie beim Dreieck die halbe Summe der Seiten mit $s$, so gewinnt die vorstehende Formel die folgende Gestalt

14) $$V = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

welche mit der für das Dreieck geltenden Formel viel Ähnlichkeit besitzt. Für $d = 0$ erhält man die letztere wieder.

*e)* Den Halbmesser $r$ des um das Sehnenviereck beschriebenen Kreises findet man leicht vermittelst der Bemerkung, dass derselbe sowohl dem Dreiecke $ABC$, welches die Seiten $a$, $b$ und $f$ besitzt, als dem Dreiecke $CDA$, welches aus den Seiten $c$, $d$ und $f$ besteht, umschrieben sein muss. Es gelten daher nach § 27, Formel 1 die Gleichungen

$$4 . \triangle ABC . r = abf,$$
$$4 . \triangle CDA . r = cdf,$$

aus deren Addition die Formel

$$4Vr = (ab + cd)f = \sqrt{(ab+cd)^2 f^2}$$

hervorgeht; vermöge des Wertes von $f^2$ verwandelt sich dieselbe in

$$15)\qquad 4Vr = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}.$$

Dividiert man beiderseits mit $4V = W$, wobei $W$ dieselbe Bedeutung hat, wie vorhin, so erhält man $r$ selbst, nämlich

$$16)\ r = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}.$$

Bemerkenswert ist die Gleichung 15) noch insofern, als das, was unter dem Wurzelzeichen steht, gerade das Produkt $f^2g^2h^2$ ausmacht, wie man vermöge der Werte von $f^2$, $g^2$ und $h^2$ leicht erkennen wird; man hat daher

$$4Vr = fgh \quad \text{oder} \quad V = \frac{fgh}{4r},$$

d. h.: Die Fläche des Sehnenvierecks ist der Quotient aus dem Produkte seiner drei Diagonalen und aus dem doppelten Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

*f)* Sind von einem Sehnenvierecke die vier Seiten nebst der Forderung gegeben, daraus das Vieleck selbst zu konstruieren, so kann man sich der Formeln 10) und 11) zur Lösung dieses Problems bedienen. Bestimmt man nämlich zwei Linien $\alpha$ und $\beta$ mittelst der Proportionen

$$b - d : a + c = b : \alpha,$$
$$b + d : a - c = b : \beta,$$

so ist

$$\alpha = b\frac{a+c}{b-d} = x + y,$$

$$\beta = b\frac{a-c}{b+d} = x - y,$$

mithin

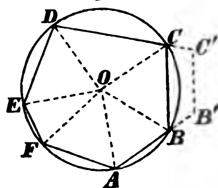
$$x = BE = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$
$$y = CE = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

und jetzt kann man das Dreieck $BCE$ aus seinen drei Seiten konstruieren; schneidet man nachher auf $BE$ die Strecke $BA = a$, auf $CF$ die Strecke $CD = c$ ab und zieht $AD$, so ist damit das gesuchte Viereck vollendet.

## § 29.
## Allgemeine Eigenschaften der Sehnen- und Tangentenvielecke.

I. Verbindet man sämtliche Ecken eines Sehnenvielecks durch Gerade mit dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, so zerfällt das Sehnenvieleck in so viel gleichschenklige Dreiecke, als die Eckenanzahl des Vielecks beträgt; als Beispiel hierzu diene das Sehnensechseck $ABCDEF$. Zugleich wird jeder Winkel des Vielecks in zwei andere zerlegt, wie z. B. $\angle A$ in $\angle OAF = a$ und $\angle OAB = \alpha$, und von den sämtlichen so entstehenden Winkeln sind immer je zwei, als Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, einander gleich, nämlich $\alpha = b$, $\beta = c$, $\gamma = d$ u. s. w. Schreibt man diese Gleichungen in folgender Form:

Fig. 115.




$$\alpha = b,$$
$$c = \beta,$$
$$\gamma = d,$$
$$e = \delta,$$
$$\varepsilon = f,$$
$$a = \varphi,$$

und addiert hierauf unter der Bemerkung, dass

$$a + \alpha = A, \quad c + \gamma = C, \quad e + \varepsilon = E,$$
$$b + \beta = B, \quad d + \delta = D, \quad f + \varphi = F$$

ist, so erhält man ohne weiteres die Gleichung

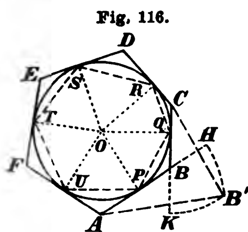
$$A + C + E = B + D + F.$$

Es erhellt sehr leicht, dass ganz dieselbe Betrachtungsweise auf jedes Sehnenvieleck anwendbar ist, welches eine gerade Anzahl von Seiten besitzt, und dass man folglich den Satz aufstellen kann: In jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Winkels.

Für das Viereck gilt, wie wir gesehen haben, dieser Satz auch umgekehrt, für ein beliebiges Vieleck von gerader Seitenzahl dagegen nicht. Denn setzt man auf eine Seite des Vielecks, etwa $BC$, ein Trapez $BCC'B'$ so auf, dass die nicht parallelen Seiten desselben in die Verlängerungen der Seiten $AB$ und $DC$ fallen, so hat das neue Vieleck $AB'C'DEF$ eben so viel Seiten als das ursprüngliche, und da $B = B'$ und $C = C'$, so ist auch $A + C' + E = B' + D + F$; trotz dieser Eigenschaft lässt sich aber um das neue Vieleck kein Kreis beschreiben, weil es sonst zwei verschiedene Kreise geben müsste, welche durch dieselben drei Punkte, etwa $D$, $E$ und $F$, hindurchgingen.

II. Zieht man in einem Tangentenvielecke Radien nach den Berührungspunkten der Seiten und verbindet die Berührungspunkte untereinander, so entsteht ein Sehnenvieleck, das durch jene Radien in gleichschenklige Dreiecke zerlegt ist. Es entsteht auf diese Weise aus dem Tangentensechseck $ABCDEF$ das Sehnensechseck $PQRSTU$; hier ist z. B. $POQ$ ein gleichschenkliges Dreieck, also $\angle OPQ = \angle OQP$, und mithin, wenn man beide Winkel von einem rechten Winkel abzieht, $\angle BPQ = \angle BQP$; daraus folgt, dass auch das Dreieck $BPQ$ gleichschenklig, nämlich $BP = BQ$ ist. Dieselbe Betrachtung wiederholt sich an jeder Ecke, und wir sehen daher, dass je zwei in einer Ecke zusammenstossende Abschnitte zweier Nachbarseiten einander gleich sind, nämlich $AU = AP$, $BP = BQ$, $CQ = CR$ u. s. f.

Fig. 116.




Nennen wir diese Abschnitte $AP$, $BP$, $BQ$, $CQ$, $CR$, $DR$ u. s. w. der Reihe nach $a$, $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$ u. s. w., so haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha &= b, \\ c &= \beta, \\ \gamma &= d, \\ e &= \delta, \\ \varepsilon &= f, \\ a &= \varphi. \end{aligned}$$

Addieren wir dieselben unter der Rücksicht, dass

$$a + \alpha = AB, \quad c + \gamma = CD, \quad e + \varepsilon = EF,$$
$$b + \beta = BC, \quad d + \delta = DE, \quad f + \varphi = FA$$

ist, so gelangen wir zu der Gleichung

$$AB + CD + EF = BC + DE + FA.$$

Es erhellt leicht, dass dieselbe Betrachtungsweise auf jedes Tangentenvieleck anwendbar ist, welches eine gerade Anzahl von Seiten besitzt, und dass man folglich den Satz aufstellen kann: In jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Seite.

Für das Viereck gilt dieser Satz auch umgekehrt, wie man durch eine einfache Betrachtung leicht finden wird, für ein beliebiges Tangentenvieleck von gerader Seitenzahl dagegen nicht. Denn verlängert man zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten des Vielecks, etwa $AB$ und $CB$, um gleichviel, nämlich $BH = BK$, über $B$ hinaus, und beschreibt aus $A$ und $C$ mit den Halbmessern $AH$ und $CK$ ein paar Bögen, die sich in $B'$ schneiden, so hat das neue Vieleck $AB'CDEF$ noch immer die Eigenschaft $AB' + CD + EF = B'C + DE + FA$, ohne jedoch ein Tangentenvieleck zu sein, da es nur einen einzigen Kreis giebt, welcher drei Seiten des Vielecks, wie z. B. $CD$, $DE$ und $EF$, berührt.

## § 30.

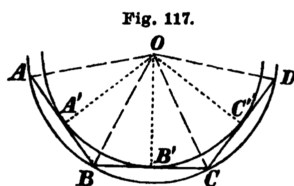
## Die Konstruktion der regelmässigen Vielecke in und um den Kreis.

Unter den unregelmässigen Vielecken ist das Dreieck das einzige, in und um welches sich jederzeit ein Kreis beschreiben lässt; ein Vieleck dagegen kann nur unter besonderen Umständen so beschaffen sein, dass entweder ein Kreis in oder um dasselbe möglich ist. Es giebt aber eine ganze Klasse von Vielecken, welche zugleich als Sehnen- und als Tangentenvielecke angesehen werden können, nämlich die regelmässigen Vielecke.

Ist $ABCD\ldots$ ein Teil vom Umfange eines regelmässigen Vielecks, so lässt sich zunächst ein Kreis beschreiben, welcher durch drei aufeinander folgende Ecken $A$, $B$, $C$ geht und dessen

Mittelpunkt $O$ sein möge; wenn ferner die Halbmesser $AO$, $BO$, $CO$ gezogen werden, so sind die Dreiecke $AOB$ und $BOC$ kongruent, woraus $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ABC$ folgt. Andererseits ist wegen der vorausgesetzten Regelmässigkeit des Vielecks $\angle ABC = \angle BCD$, mithin $\angle OCB = \frac{1}{2} \angle BCD$, folglich auch $\angle OCD = \frac{1}{2} \angle BCD$. Aus $\angle OCB = \angle OCD$, aus $OC = OD$ und $BC = CD$ zusammen ergiebt sich aber die Kongruenz der Dreiecke $BOC$ und $COD$ und daraus $OD = OC$; der durch drei Ecken $A$, $B$, $C$ beschriebene Kreis geht also auch durch die vierte Ecke $D$, folglich, weil er durch $B$, $C$, $D$ geht, auch durch $E$ u. s. w., d. h. er geht durch sämtliche Ecken des Vielecks.

Fig. 117.



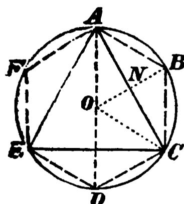

Das eben Bewiesene giebt zu erkennen, dass die Seiten dieses Vielecks als Sehnen, und zwar, weil sie gleich sind, als gleiche Sehnen eines Kreises angesehen werden dürfen. Aus diesem Grunde haben sie von dem Mittelpunkte $O$ gleiche Entfernung und die Senkrechten $OA'$, $OB'$, $OC'$ u. s. w. sind mithin einander gleich. Man kann daher aus $O$ einen Kreis beschreiben, welcher durch die Punkte $A'$, $B'$, $C'$ u. s. w. geht und die Vielecksseiten in diesen Punkten berührt. — Fassen wir das Bisherige zusammen, so haben wir den Satz: Jedes regelmässige Vieleck ist zugleich Sehnen- und Tangentenvieleck.

Die Winkel $AOB$, $BOC$, $COD$ u. s. w. und ebenso die Winkel $A'OB'$, $B'OC'$ u. s. w. sind, wie man ohne Mühe erkennen wird, einander gleich und man kann daher einen solchen Winkel den Centriwinkel des regelmässigen Vielecks nennen. Hat dasselbe $n$ Seiten, so ist jener Winkel $= \frac{4}{n} R$ oder $= \frac{360^0}{n}$ und hiernach lässt sich der Centriwinkel im voraus durch Rechnung bestimmen. Kennt man aber den Centriwinkel eines regulären Vielecks, so ist es sehr leicht, ein solches in oder um einen gegebenen Kreis zu beschreiben. Man trägt nämlich den Centriwinkel soviel mal, als das Vieleck Seiten hat, an den Mittelpunkt des gegebenen Kreises an und verbindet darauf die Punkte $A, B, C \ldots$, in welchen die Schenkel den Umfang schneiden,

durch gerade Linien, wenn man ein Sehnenvieleck haben will; dagegen legt man in diesen Punkten Tangenten an den Kreis, wenn ein umschriebenes Vieleck entstehen soll. — Es giebt übrigens einige Fälle, in welchen der Centriwinkel sich nicht nur berechnen, sondern auch geometrisch konstruieren lässt, und diese Fälle wollen wir noch besonders betrachten.

Das regelmässige Sehnen- und Tangentendreieck. Für $n = 3$ finden wir $\frac{360^0}{3} = 120^0$ als Centriwinkel des regelmässigen Dreiecks; da dieser Winkel das Doppelte von $60^0$, d. h. von einem Winkel im gleichseitigen Dreiecke ausmacht, so erhält man den gesuchten Centriwinkel, wenn man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert, dessen eine Spitze in den Mittelpunkt des gegebenen Kreises fällt, und darauf den am Centrum liegenden Dreieckswinkel verdoppelt. Am bequemsten ist es, gleich den Kreishalbmesser selbst zur Seite jenes gleichseitigen Dreiecks, also $AB = AO$ zu nehmen, wodurch $\angle AOB = 60^0$ wird. Nimmt man darauf weiter $BC = AB$, so ist $\angle AOC = 2 \angle AOB = 120^0$, mithin $AOC$ der gesuchte Centriwinkel und $AC$ eine Seite des fraglichen Dreiecks, welches nun leicht vollendet werden kann, indem man $CE = AC$ macht, wodurch von selbst $AE = AC$ wird.

Fig. 118.



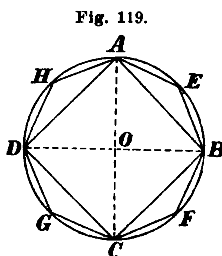

Nimmt man $AO = AB = BC = CD = DE = EF$, so ist jeder der Winkel $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOE$, $EOF$ gleich $60^0$, mithin $\angle FOA = 360^0 - 5.60^0 = 60^0$ und folglich $ABCDEF$ das regelmässige Sechseck im Kreise.

Denkt man sich die Winkel $AOB$, $BOC$ u. s. w. durch Halbmesser halbiert und die Endpunkte dieser Halbmesser durch Sehnen verbunden, so entsteht ein regelmässiges Vieleck, dessen Centriwinkel $= 30^0$ ist; man erhält so das regelmässige Zwölfeck. Zugleich erhellt, dass man durch weitere Halbierung der Centriwinkel fernere regelmässige Vielecke konstruieren kann, welche der Reihe nach 24, 48, 96 u. s. w. Ecken besitzen.

Das regelmässige Viereck im Kreise. Der Fall, wo $n = 4$, ist einer der einfachsten, die es geben kann, denn es

wird in diesem Falle der Centriwinkel $= \frac{360^0}{4} = 90^0$ und also braucht man, um ihn darzustellen, nur einen Durchmesser $AC$ zu ziehen und in dem Mittelpunkte desselben eine Senkrechte $BOD$ zu errichten; $ABCD$ ist dann das gesuchte regelmässige Sehnenviereck.

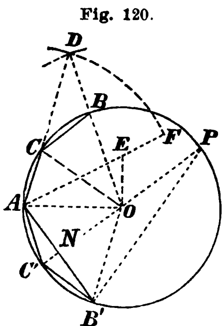
Fig. 119.




Auch hier kann man, wie vorhin, durch fortgesetzte Halbierung des Centriwinkels zu neuen regelmässigen Vielecken gelangen, welche der Reihe nach 8, 16, 32, 64... Ecken besitzen. So ist z. B. $AEBFCGDH$ das regelmässige Achteck im Kreise.

Das regelmässige Sehnenfünfeck. Für $n = 5$ erhält der Centriwinkel den Wert $\frac{360^0}{5} = 72^0$ und dieser Winkel besitzt eine Eigentümlichkeit, welche seine Konstruktion sehr leicht macht. Denken wir uns nämlich ein gleichschenkliges Dreieck $AOD$ konstruiert, worin der Winkel $AOD$ gleich dem Centriwinkel $72^0$ ist, so beträgt der Winkel an der Spitze dieses Dreiecks $180^0 - 2.72^0 = 36^0$, d. h. gerade die Hälfte des Winkels an der Basis. Liesse sich nun aus diesem Verhältnisse der Winkel unseres Dreiecks das Verhältnis seiner Seiten ableiten, so würde man $AD = OD$ finden können, sobald der Halbmesser $AO = r$ gegeben ist, und die Konstruktion des Dreiecks $AOD$ führte dann unmittelbar zu der des regulären Fünfecks.

Fig. 120.




Ziehen wir den Halbmesser $OC$ nach dem Punkte $C$, in welchem $AD$ den Kreis schneidet, so ist $AOC$ ein gleichschenkliges Dreieck, und weil $\angle OAC$ der vorigen Konstruktion zufolge $= \angle AOD$ war, auch $\angle AOC = \angle ADO = 36^0 = \frac{1}{2} \angle AOD$; weiter folgt hieraus $\angle COD = \frac{1}{2} \angle AOD = \angle CDO$ und also $CD = CO = AO = r$. Nennen wir $x$ die Linie $AD$, so haben wir wegen $\triangle ADO \sim \triangle AOC$

$$AD:AO = AO:AC,$$

d. h., weil $AC = AD - CD = AD - AO = x - r$ ist,

$$x:r = r:x - r,$$

und daraus folgt für $x$ die quadratische Gleichung

$$x^2 - rx = r^2.$$

Durch Auflösung derselben findet sich

$$x = \tfrac{1}{2}r + \sqrt{r^2 + (\tfrac{1}{2}r)^2},$$

und dieser Ausdruck ist sehr leicht zu konstruieren, indem man die Gerade $OE = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} r$ senkrecht auf $AO$ stellt, die Hypotenuse $AE$ zieht und sie so weit verlängert, dass $EF = EO = \frac{1}{2} r$ wird; $AF$ ist dann die gesuchte Linie $x = AD = OD$. Konstruiert man jetzt das gleichschenklige Dreieck $AOD$, so ist $\angle AOD$ der gesuchte Centriwinkel und $AB$ würde demnach die Seite des regelmässigen Fünfecks sein.

Da $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB$ ist, so folgt hieraus noch, dass $\angle AOC$ der Centriwinkel des regelmässigen Zehnecks, mithin $AC$ die Seite desselben sein muss. Man erhält also durch die vorige Konstruktion die Seiten des Fünfecks und Zehnecks gleichzeitig.

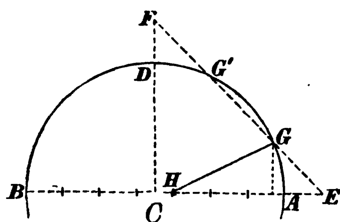
Halbiert man den Centriwinkel des Zehnecks, so erhält man den Centriwinkel des Zwanzigecks; nochmalige Halbierung giebt den Centriwinkel des Vierzigecks u. s. w.

Aus der Bemerkung, dass $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ ist, folgt noch, dass man das reguläre Fünfzehneck beschreiben kann, indem man den Centriwinkel des Zehnecks vom Centriwinkel des Sechsecks subtrahiert; die successive Halbierung dieses Centriwinkels $\frac{360^0}{15} = 24^0$ führt dann weiter zur Konstruktion des regelmässigen Dreissigecks, Sechzigecks u. s. f.

Die hier entwickelten Konstruktionen regelmässiger Vielecke sind die einzigen, welche sich mit den Hilfsmitteln der bis hierher entwickelten Planimetrie ausführen lassen; will man dagegen keine vollkommen genauen Konstruktionen, sondern bloss solche, bei denen ein so kleiner Fehler stattfindet, dass er für praktische Zeichnungen unbemerkbar ist, so bediene man sich des nachstehenden Verfahrens, dessen grosse Annäherung an die Wahrheit in der Trigonometrie nachgewiesen werden soll.

Es sei $AB$ der Durchmesser des gegebenen Kreises und $CD$ ein darauf senkrecht gestellter Halbmesser. Um in diesen Kreis ein regelmässiges $n$-Eck zu beschreiben, teile man den Durchmesser $AB$ in $n$ gleiche Teile (in der Figur ist $n = 7$ genommen), verlängere sowohl den Durchmesser als den Halbmesser um einen solchen Teil $AE = DF = \frac{1}{n} AB$ und ziehe die Gerade $EF$, welche den Kreis zum ersten Male in $G$ schneidet. Dann ist die Gerade zwischen $G$ und dem dritten Teilungspunkte $H$ sehr nahe gleich der Seite des regelmässigen $n$-Ecks. Für $n = 3$ und $n = 4$ giebt die Konstruktion etwas Unmögliches, für $n = 5$ etwas wegen seiner Ungenauigkeit nicht Brauchbares, für $n > 5$ dagegen empfiehlt sich die Konstruktion durch ihren hohen Grad von Genauigkeit.

Fig. 121.




## § 31.

## Die Berechnung der regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecke.

Wenn der Halbmesser $r$ eines Kreises, in oder um welchen ein regelmässiges Vieleck beschrieben werden soll, und die Seitenzahl $n$ des letzteren gegeben sind, so müssen sich daraus alle Bestandteile des fraglichen Vielecks berechnen lassen, weil die Aufgabe eine völlig bestimmte ist. Von diesen Bestandteilen des Vielecks betrachten wir nun folgende:

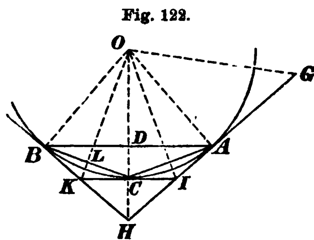
die Seite des regelmässigen Sehnenvielecks: $s_n$,
" " " " Tangentenvielecks: $t_n$,
den Umfang des regelmässigen Sehnenvielecks: $e_n$,
" " " " Tangentenvielecks: $u_n$,
die Fläche des regelmässigen Sehnenvielecks: $E_n$,
" " " " Tangentenvielecks: $U_n$,

wobei durch den anhängenden Buchstaben $n$ deutlich bezeichnet ist, dass das in Rede stehende Vieleck $n$ Seiten besitzt. Es sind nun für die Berechnung dieser Grössen zwei Bemerkungen von Gewicht, einmal, dass man aus $s_n$ die übrigen Grössen $t_n$,

$e_n$ u. s. w. und zweitens aus diesen wieder die Grössen $s_{2n}$, $t_{2n}$, $e_{2n}$, $u_{2n}$, $E_{2n}$, $U_{2n}$ ableiten kann, welche für das $2n$-Eck dasselbe bedeuten, wie $s_n$, $t_n$ u. s. w. für das $n$-Eck. Mit dieser doppelten Ableitung beschäftigen wir uns zunächst.

Hier möge $AB$ die Sehne des regelmässigen Sehnenvielecks von $n$ Seiten, also $AB = s_n$ sein; legen wir durch $A$ und $B$ Tangenten an den Kreis, welche sich in $H$ schneiden, so ist $AH$ die Hälfte von der Seite des umschriebenen $n$-Ecks oder $AH = \frac{1}{2} t_n$ und $2AH = GH = t_n$; halbieren wir ferner den Winkel $AOB$ durch die Gerade $OC$, ziehen $AC$, $BC$ und durch $C$ die Tangente $IK$, so ist weiter $AC = s_{2n}$ und $IK = t_{2n}$. Zuvörderst haben wir nun vermöge der Ähnlichkeit der Dreiecke $ODA$ und $OAH$

Fig. 122.




$$OD : DA = OA : AH,$$

d. i.

$$\sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2} s_n)^2} : \tfrac{1}{2} s_n = r : \tfrac{1}{2} t_n,$$

und finden hieraus ohne Mühe

1) $$t_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}}.$$

Da ferner der Umfang $e_n$ aus $n$ Seiten besteht, von denen jede $= s_n$ ist, so erhalten wir

2) $$e_n = n s_n$$

und aus ganz demselben Grunde

3) $$u_n = n t_n = \frac{n r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}} = \frac{r e_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}}.$$

Um weiter $E_n$ zu erhalten, brauchen wir nur zu berücksichtigen, dass die Fläche des Dreiecks $AOB$ offenbar $= \frac{1}{n} E_n$ sein muss und andererseits $\triangle AOB = \frac{1}{2} AB . DO$ ist, woraus zusammen die Gleichung

$$\frac{1}{n} E_n = \tfrac{1}{2} s_n \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2} s_n)^2}$$

folgt, die unmittelbar zur Kenntnis von $E_n$ führt, nämlich

4) $$E_n = \tfrac{1}{2} n s_n \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2} s_n)^2} = \tfrac{1}{2} \frac{n r (s_n)^2}{t_n}.$$

Die Fläche $U_n$ endlich findet sich aus der Bemerkung, dass die Fläche des Dreiecks $GOH = \frac{1}{n} U_n$ und ausserdem $= \frac{1}{2} GH . AO$ ist; dies giebt nämlich die Gleichung

$$\frac{1}{n} U_n = \frac{1}{2} t_n r$$

oder, wenn man mit $n$ multipliziert und für $t_n$ seinen Wert setzt,

$$5) \qquad U_n = \tfrac{1}{2} n r t_n = \tfrac{1}{2} \frac{n r^2 s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}}.$$

II. Um jetzt die zweite Aufgabe zu lösen, berücksichtigen wir zunächst die Ähnlichkeit der Dreiecke $BDH$ und $KCH$; diese giebt

$$BD : BH = KC : KH,$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} s_n : \tfrac{1}{2} t_n = \tfrac{1}{2} t_{2n} : \tfrac{1}{2} t_n - \tfrac{1}{2} t_{2n};$$

diese Proportion führt unmittelbar zu der Gleichung

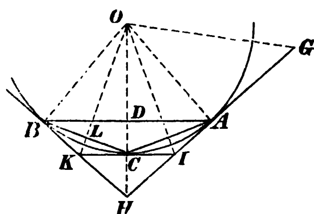
$$t_n t_{2n} = s_n t_n - s_n t_{2n}$$

und daraus findet man sehr leicht

$$6) \qquad t_{2n} = \frac{s_n t_n}{s_n + t_n}.$$

Da sich ferner im Punkte $B$ die Sehne $BA$ und die Tangente $BH$ schneiden, so ist der Winkel $ABH$ gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen $AB$ oder gleich dem Centriwinkel über dem halben Bogen $BC$, also $\angle ABH = \angle BOC$; aus demselben Grunde ist $\angle CBH = \angle BOK$ und, da $\angle BOK = \frac{1}{2} \angle BOC$, auch $\angle CBH = \frac{1}{2} \angle ABH$, woraus hervorgeht, dass die Gerade $BC$ den Winkel $DBK$ halbiert. Nennen wir $L$ den Durchschnitt der aufeinander senkrechten Geraden $BC$ und $OK$, so folgt jetzt $\triangle CBD \sim \triangle KBL$ und daraus

Fig. 122.




$$BD : BC = BL : BK,$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} s_n : s_{2n} = \tfrac{1}{2} s_{2n} : \tfrac{1}{2} t_{2n}.$$

Dies giebt durch Multiplikation der inneren sowohl als der äusseren Glieder und durch nachherige Wurzelausziehung

$$7)\qquad s_{2n} = \sqrt{\tfrac{1}{2} s_n t_{2n}},$$

und wenn man für $t_{2n}$ seinen Wert aus Nr. 6 setzt, so hat man zur Berechnung von $s_{2n}$ und $t_{2n}$ die Formeln:

$$8)\qquad s_{2n} = \frac{s_n \sqrt{t_n}}{\sqrt{2(s_n + t_n)}}, \quad t_{2n} = \frac{s_n t_n}{s_n + t_n}.$$

Für die Praxis wird es jedoch bequemer sein, erst $t_{2n}$ mittelst der Formel 6) und dann $s_{2n}$ nach Nr. 7) zu berechnen.

Aus den Formeln 2) und 3) folgt unmittelbar

$$s_n = \frac{1}{n} e_n, \quad t_n = \frac{1}{n} u_n,$$

und ganz entsprechend

$$s_{2n} = \frac{1}{2n} e_{2n}, \quad t_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n}.$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichungen 6) und 7) führt sogleich zu den Formeln:

$$9)\qquad u_{2n} = \frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n}, \quad e_{2n} = \sqrt{e_n u_{2n}},$$

oder, wenn man $e_{2n}$ zuerst berechnen wollte,

$$10)\qquad e_{2n} = e_n \sqrt{\frac{2 u_n}{e_n + u_n}}, \quad u_{2n} = \frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n}.$$

Um endlich die entsprechenden Formeln für die Flächen $E_n$, $U_n$, $E_{2n}$ und $U_{2n}$ zu erhalten, bemerken wir, dass das Dreieck $AOC$ einerseits $= \tfrac{1}{2} OC . AD = \tfrac{1}{2} r . \tfrac{1}{2} s_n$, andererseits aber $= \frac{1}{2n} E_{2n}$ ist, woraus folgt

$$\tfrac{1}{4} r s_n = \frac{1}{2n} E_{2n}$$

oder

$$n s_n = \frac{2 E_{2n}}{r},$$

d. h.

$$e_n = \frac{2 E_{2n}}{r}.$$

Ferner ist $\triangle\, GOH$ einerseits $= \frac{1}{2} AO \,.\, GH = \frac{1}{2} r t_n$ und andererseits $= \frac{1}{n} U_n$, was zusammen die Gleichungen giebt:

$$\frac{1}{2} r t_n = \frac{1}{n} U_n$$

oder

$$n t_n = \frac{2 U_n}{r},$$

d. h.

$$u_n = \frac{2 U_n}{r}.$$

Substituieren wir diese Werte von $e_n$ und $u_n$ in die zweite der unter Nr. 9 aufgeführten Gleichungen, so wird

$$E_{4n} = \sqrt{E_{2n} U_{2n}}$$

oder, wenn wir $n$ an die Stelle von $2n$ treten lassen,

11) $$E_{2n} = \sqrt{E_n U_n}.$$

Ebenso leicht ergiebt sich aus der ersten Formel in Nr. 9

12) $$U_{2n} = \frac{2 E_{2n} U_n}{E_{2n} + U_n},$$

der man noch durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit $E_n$ die folgenden Gestalten geben kann:

$$U_{2n} = \frac{2 E_n E_{2n} U_n}{E_n E_{2n} + E_n U_n} = \frac{2 E_n E_{2n} U_n}{E_n E_{2n} + (E_{2n})^2},$$

d. i. nach Hebung mit $E_{2n}$

13) $$U_{2n} = \frac{2 E_n U_n}{E_n + E_{2n}},$$

wobei die letzte Form insofern bequemer ist, als das Produkt $E_n U_n$ schon in Nr. 11 benutzt war.

III. Nach den Vorbereitungen, die wir soeben beendigt haben, bietet die vollständige Berechnung derjenigen regelmässigen Vielecke, welche sich überhaupt konstruieren lassen, keine Schwierigkeit mehr, wie die folgenden einzelnen Fälle zeigen werden.

Die Seite des regelmässigen Sechsecks im Kreise ist unmittelbar bekannt, nämlich $s_6 = r$; daraus findet sich sogleich die Seite des regelmässigen Dreiecks, wenn man berücksichtigt, dass

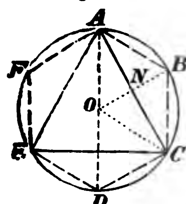


Fig. 123.

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BN}^2,$$

d. h.

$$(\tfrac{1}{2} s_3)^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2} r)^2 = \tfrac{3}{4} r^2$$

ist; dies giebt zunächst $s_3$ und dann $t_3$, $e_3$, $u_3$ u. s. w., nämlich

$$s_3 = r\sqrt{3}, \qquad t_3 = 2r\sqrt{3},$$
$$e_3 = 3r\sqrt{3}, \qquad u_3 = 6r\sqrt{3},$$
$$E_3 = \tfrac{3}{4} r^2 \sqrt{3}, \qquad U_3 = 3r^2\sqrt{3}.$$

Ebenso leicht findet man aus $s_6 = r$

$$s_6 = r, \qquad t_6 = \tfrac{2}{3} r\sqrt{3},$$
$$e_6 = 6r, \qquad u_6 = 4r\sqrt{3},$$
$$E_6 = \tfrac{3}{2} r^2 \sqrt{3}, \qquad U_6 = 2r^2\sqrt{3}.$$

Für das regelmässige Sehnenviereck ist

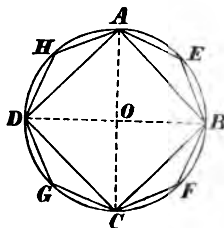


Fig. 124.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\overline{AO}^2,$$

d. i.

$$(s_4)^2 = 2r^2,$$

und hieraus findet man

$$s_4 = r\sqrt{2}, \qquad t_4 = 2r,$$
$$e_4 = 4r\sqrt{2}, \qquad u_4 = 8r,$$
$$E_4 = 2r^2, \qquad U_4 = 4r^2;$$

die Formeln 6, 7, 8 u. s. w. geben dann

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \qquad t_8 = 2r(\sqrt{2} - 1),$$
$$e_8 = 8r\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \qquad u_8 = 16r(\sqrt{2} - 1),$$
$$E_8 = 2r^2\sqrt{2}, \qquad U_8 = 8r^2(\sqrt{2} - 1).$$

Sehr leicht ist ferner die Seite des regelmässigen Sehnenfünfecks zu finden, wenn man von der Seite des Sehnenzehnecks ausgeht. Es ist nämlich dem vorigen Paragraphen zufolge $AC$

die Seite des regelmässigen Zehnecks, mithin $= AD - CD = x - r$ nach der dortigen Bezeichnung, und vermöge des Wertes von $x$

$$AC = s_{10} = \sqrt{r^2 + (\tfrac{1}{2}r)^2} - \tfrac{1}{2}r = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Fig. 125.

Hieraus ergiebt sich $s_5$ sogleich, wenn man berücksichtigt, dass in voriger Figur, wo $AB' = AB$ und $AC' = AC$, $C'O$ bis $P$ verlängert und $B'P$ gezogen ist, die Gleichung

$$C'P \,.\, B'N = B'C' \,.\, B'P$$

stattfindet, welche nach unserer Bezeichnung in

$$2r \,.\, \tfrac{1}{2}s_5 = s_{10} \,.\, \sqrt{4r^2 - (s_{10})^2}$$

übergeht; vermöge des Wertes von $s_{10}$ findet sich hieraus

$$s_5 = \tfrac{1}{2}r\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad t_5 = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$

$$e_5 = \tfrac{5}{2}r\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad u_5 = 10r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$

$$E_5 = \tfrac{5}{8}r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \qquad U_5 = 5r^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Ganz ähnlich erhält man

$$s_{10} = \tfrac{1}{2}r\,(\sqrt{5} - 1), \qquad t_{10} = 2r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$e_{10} = 5r\,(\sqrt{5} - 1), \qquad u_{10} = 20r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}},$$

$$E_{10} = \tfrac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad U_{10} = 10r^2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Bemerkenswert ist noch eine Beziehung zwischen $s_5$, $s_{10}$ und $r$; man hat nämlich

$$(s_5)^2 - (s_{10})^2 = \tfrac{1}{4}r^2\left[(10 - 2\sqrt{5}) - (5 - 2\sqrt{5} + 1)\right] = r^2,$$

was sich leicht in Worte fassen lässt. Hieraus wird man leicht eine andere Konstruktion für das Fünfeck und Zehneck ableiten, indem man

$$s_{10} = \sqrt{r^2 + (\tfrac{1}{2}r)^2} - \tfrac{1}{2}r$$

zuerst darstellt und mittelst der vorigen Beziehung $s_5$ daraus bestimmt.

## Kap. VII.

# Rektifikation und Quadratur des Kreises.

---

### § 32.

### Die Rektifikation des Kreises.

Da der Halbmesser eines Kreises zur Bestimmung des letzteren hinreicht, so folgt von selbst, dass auch der Kreisumfang seiner Grösse oder Länge nach vollkommen bestimmt sein muss, sobald der Radius gegeben ist; es müssen demnach die Längen des Halbmessers und des Umfanges in einem gewissen Verhältnisse zueinander stehen, dessen Ausmittelung die Rektifikation des Kreises genannt zu werden pflegt. Obgleich nun bei dieser Untersuchung die Schwierigkeit stattfindet, dass hier ungleichartige Grössen, nämlich eine gerade und eine krumme Linie, miteinander verglichen werden sollen, so bemerkt man doch leicht ein Mittel zur Lösung der Aufgabe. Beschreibt man nämlich in und um den Kreis regelmässige Vielecke von immer grösseren Seitenzahlen, so schmiegen sich jene Vielecke offenbar um so genauer dem Kreise an, je grösser die Seitenzahlen sind, und daher müssen die Umfänge zweier regulären Vielecke von grossen Seitenzahlen dem Kreisumfange ziemlich nahe kommen. Wir wollen nun zuerst untersuchen, inwiefern diese, vorläufig bloss nach dem Augenscheine gemachte Bemerkung richtig ist, und wenden uns zu diesem Zwecke an die Formeln:

$$1) \qquad u_{2n} = \frac{2\,e_n u_n}{e_n + u_n} \quad \text{und} \quad e_{2n} = \sqrt{e_n u_{2n}}.$$

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Seite des regelmässigen Tangentenvielecks von $n$ Seiten grösser als die Seite des zugehörigen Sehnenvielecks oder $t_n > s_n$ sein muss; denn setzen wir in der Formel

$$t_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}}$$

für die Wurzel rechter Hand die Grösse $r$, was offenbar mehr als der ursprüngliche Nenner ist, so haben wir

$$\frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}} > \frac{r s_n}{r}, \quad \text{d. h. } t_n > s_n.$$

Hieraus folgt weiter $n t_n > n s_n$, d. i. $u_n > e_n$, dass also auch der Umfang des umschriebenen regelmässigen $n$-Ecks grösser als der Umfang des eingeschriebenen $n$-Ecks ist. Setzen wir nun im Nenner der ersten Formel in Nr. 1) für $e_n$ das zu grosse $u_n$, so folgt

$$\frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n} > \frac{2 e_n u_n}{u_n + u_n}$$

oder

2) $$u_{2n} > e_n,$$

und wenn wir in derselben Formel im Nenner an die Stelle von $u_n$ das zu kleine $e_n$ setzen,

$$\frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n} < \frac{2 e_n u_n}{e_n + e_n},$$

d. i.

3) $$u_{2n} < u_n \quad \text{oder} \quad u_n > u_{2n}.$$

Benutzen wir ferner die Ungleichung 2) für die zweite Formel in Nr. 1), so ist

$$\sqrt{e_n u_{2n}} > \sqrt{e_n e_n},$$

d. h.

4) $$e_{2n} > e_n \quad \text{oder} \quad e_n < e_{2n}.$$

Mehrmals nacheinander angewendet führen die Ungleichungen 3) und 4) zu den Beziehungen

$$u_n > u_{2n} > u_{4n} > u_{8n} \ldots,$$
$$e_n < e_{2n} < e_{4n} < e_{8n} \ldots,$$

d. h.: Wenn man die Seitenzahlen der regelmässigen Tangenten- und Sehnenvielecke fortwährend verdoppelt, so nehmen die Umfänge der ersten immer ab und die der zweiten immer zu.

Wie gross nun auch die Seitenzahl eines Tangentenvielecks sein möge, so liegt dessen Umfang doch jederzeit ausserhalb des Kreises und kann folglich nicht auf einen blossen Punkt

zusammenschrumpfen; die Abnahme des Umfanges kann daher auch nicht ins Unbegrenzte fortgehen, wie z. B. die Abnahme der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ u. s. w. Ebensowenig ist es möglich, dass die Zunahme der Umfänge der Sehnenvielecke ins Unendliche hinausgehe, wie z. B. bei den Zahlen 2, 4, 8, 16 u. s. w., weil der Umfang jedes Sehnenvielecks offenbar kleiner als der Kreisumfang sein muss, welcher letztere, so unbekannt er auch ist, doch jedenfalls nur eine endliche bestimmte Grösse haben kann. Aus beiden Bemerkungen zusammen folgt zunächst: Die Umfänge der Tangentenvielecke nähern sich durch Abnahme einer bestimmten Grenze, und ebenso nähern sich die Umfänge der Sehnenvielecke durch Zunahme einer gleichfalls bestimmten Grenze.

Nennen wir $p$ den Grenzwert, welchem sich $u_n$ bei fortwährend wachsendem $n$ nähert, und ebenso $q$ den Grenzwert von $e_n$, so ist weiter zu untersuchen, ob $p$ und $q$ voneinander verschieden sind oder nicht. Nun ist aber nach der Formel 3) des vorigen Paragraphen

$$\frac{u_n}{e_n} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s_n)^2}},$$

und daran knüpft sich folgende Bemerkung. Wenn der Kreisumfang in $n$ gleiche Teile geteilt wird, so kann ein solcher Teil so klein, als man es will, gemacht werden, wenn man nur die Anzahl $n$ jener Teile hinreichend gross nimmt; dasselbe gilt um so mehr von der Sehne eines solchen Bogens, weil dieselbe kleiner als der Bogen ist; für unendlich wachsende $n$ sinkt also $s_n$ und noch mehr $\frac{1}{2}s_n$ unter jede angebbare Kleinheit herab und nähert sich der Grenze Null. Daraus folgt unmittelbar, dass $\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s_n)^2}$ der Grenze $\sqrt{r^2} = r$ so nahe, als es beliebt, gebracht werden kann, und wenn man nun zu den Grenzen selbst übergeht, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{r} = 1,$$

woraus $q = p$ folgt; in Worten heisst dies: Die Umfänge der Tangenten- und der Sehnenvielecke nähern sich,

jene durch Abnahme, diese durch Zunahme, einer gemeinschaftlichen Grenze.

Welche nun diese Grenze $p$ sei, erhellt auf der Stelle, wenn man sich erinnert, dass der Umfang des Tangentenvielecks immer ausserhalb des Kreises und der Umfang des Sehnenvielecks immer innerhalb des Kreises, oder umgekehrt der Kreisumfang zwischen jenen Umfängen liegt. Die gemeinschaftliche Grenze nämlich, welcher beide Umfänge zueilen, kann nur der Umfang des Kreises sein, denn sonst müsste der unmögliche Fall eintreten, dass von irgend einer Stelle an der Kreisumfang nicht mehr zwischen jenen Umfängen enthalten wäre. Hiermit sind wir zu der wissenschaftlichen Überzeugung von der Richtigkeit des anfangs ausgesprochenen Gedankens gelangt und es bedarf jetzt nur noch der wirklichen Berechnung zweier regelmässigen Vierecke von grosser Seitenzahl. Geht man vom Sechseck aus und berechnet der Reihe nach $e_6$, $u_6$, $e_{12}$, $u_{12}$, $e_{24}$, $u_{24}$ u. s. w., so gelangt man zu folgenden Zahlen:

| $n$ | $e_n$ | $u_n$ |
|---|---|---|
| 6 | $2r.3$ | $2r.3{,}4641016$ |
| 12 | $2r.3{,}1058285$ | $2r.3{,}2153903$ |
| 24 | $2r.3{,}1326286$ | $2r.3{,}1596599$ |
| 48 | $2r.3{,}1393502$ | $2r.3{,}1460862$ |
| 96 | $2r.3{,}1410319$ | $2r.3{,}1427146$ |
| 192 | $2r.3{,}1414524$ | $2r.3{,}1418730$ |
| 384 | $2r.3{,}1415576$ | $2r.3{,}1416627$ |
| 768 | $2r.3{,}1415838$ | $2r.3{,}1416101$ |
| 1536 | $2r.3{,}1415904$ | $2r.3{,}1415970$ |
| 3072 | $2r.3{,}1415921$ | $2r.3{,}1415937$ |
| 1144 | $2r.3{,}1415925$ | $2r.3{,}1415929$ |
| 12288 | $2r.3{,}1415926$ | $2r.3{,}1415927$ |
| | u. s. w. | |

Da der Kreisumfang $p$ zwischen je zwei in einer Zeile nebeneinander stehenden Zahlen enthalten sein muss, so lassen

sich so genaue Grenzen für denselben angeben, als man es nur wünscht; so ist z. B.

$$p > 2r \,.\, 3{,}1415926,$$
$$p < 2r \,.\, 3{,}1415927,$$

oder, wenn wir das Verhältnis $\frac{p}{2r}$ mit $\pi$ bezeichnen, auf sechs Decimalen genau

5) $$p = 2r \,.\, \pi, \quad \pi = 3{,}1415926\ldots$$

Die Zahl $\pi$, welche hier vorkommt und das Verhältnis zwischen dem Umfange und Durchmesser eines Kreises ausdrückt, pflegt man nach einem ihrer ersten Berechner die Ludolphsche Zahl zu nennen; genauer ist dieselbe:

6) $$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots,$$

was jedoch nur wissenschaftlichen Wert hat, da man für praktische Anwendungen mit einer geringeren Zahl Decimalen oder mit dem Verhältnisse $\frac{355}{113}$, welches in sechs Stellen mit dem Obigen übereinstimmt, vollkommen ausreicht.

Will man umgekehrt aus dem Umfange eines Kreises seinen Durchmesser oder Halbmesser berechnen, so hat man als leichte Folge von Nr. 5

7) $$2r = \frac{p}{\pi}, \quad r = \frac{p}{2\pi}$$

und dabei ist

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ldots$$

Setzt man in der Formel $r = \frac{p}{2\pi}$ an die Stelle von $p$ die Gradzahl von 360° der Peripherie, so erhält man auch $r$ in Graden ausgedrückt, d. h. man bekommt statt $r$ einen Bogen, welcher mit dem Halbmesser gleiche Länge besitzt; braucht man den Buchstaben $\varrho$ zur Bezeichnung dieses Bogens, so ist

$$\varrho = arc\,\frac{360^0}{2\pi} = arc\,\frac{180^0}{\pi} = arc\; 57^0\; 17'\; 44'', 8.$$

## § 33.

## Die Rektifikation beliebiger Bögen.

Da zwei Bögen eines und desselben Kreises gleichartige Grössen sind, so lässt sich das Verhältnis derselben mittelst des Verfahrens auffinden, welches wir in § 14 zur Bestimmung des Verhältnisses zweier Geraden benutzt haben, und in der That würde man alles dort Gesagte hier wörtlich und nur mit dem Unterschiede wiederholen können, dass man an die Stelle von „Gerade“ das Wort „Kreisbogen“ treten liesse. Weil ferner zu gleichen Bögen auch gleiche Centriwinkel gehören, so lassen sich die Centriwinkel auf ganz dieselbe Weise behandeln und ebenso oft voneinander wegnehmen als die entsprechenden Bögen; das Ergebnis muss daher bei dieser Vergleichung notwendig dasselbe wie bei der vorigen sein, und wir haben deshalb den Satz: Zwei Bögen eines und desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

Nennen wir also $b$ und $\beta$ zwei Bögen eines Kreises und $c$, $\gamma$ die entsprechenden Centriwinkel, so ist

$$c:\gamma = b:\beta,$$

und daraus geht hervor, dass man die Länge jedes beliebigen zu $\gamma$ gehörigen Bogens $\beta$ finden kann, sobald die Länge $b$ eines bestimmten zu $c$ gehörenden Bogens bekannt ist. Nach dem Vorigen kennen wir aber die Länge $b$ für den Fall $c = 360^0$, denn in diesem Falle ist $b = 2r\pi$; mithin haben wir, wenn $\gamma$ in Graden ausgedrückt wird,

$$360^0 : \gamma^0 = 2r\pi : \beta,$$

und wenn wir hieraus $\beta$ bestimmen,

$$1) \qquad \beta = \frac{\gamma\pi}{180} r.$$

Die häufig vorkommende Rechnung nach dieser Formel wird am bequemsten ausgeführt, wenn man ein- für allemal die Länge der Bögen von einem Grade, einer Minute und einer Sekunde bestimmt, indem man für $\gamma$ der Reihe nach $1^0$, $1' = \frac{1^0}{60}$ und $1'' = \frac{1^0}{3600}$ setzt; man erhält so

$$arc\ 1^0 = \frac{\pi}{180} r = r . 0{,}01745\,32925 \ldots,$$
$$arc\ 1' = \frac{arc\ 1^0}{60} = r . 0{,}00029\,08882 \ldots,$$
$$arc\ 1'' = \frac{arc\ 1'}{60} = r . 0{,}00000\,48481 \ldots$$

Hieraus setzt man leicht die Länge jedes Bogens zusammen, der in Graden, Minuten und Sekunden gegeben ist. Behalten wir wie im vorigen Paragraphen die Bezeichnung $arc \frac{180^0}{\pi} = \varrho$ bei, so gestaltet sich die Formel 1) wie folgt:

2) $$\beta = \frac{\gamma}{\varrho} r,$$

wo es am bequemsten ist, $\varrho$ in Sekunden auszudrücken, nämlich $\varrho = arc\ 206246'',8$; verwandelt man auch den Centriwinkel $\gamma$ in Sekunden und dividiert darauf mit 206246,8, so erhält man auf diese Weise gleichfalls die Länge des Bogens $arc\,\gamma$, was in manchen Fällen bequemer sein kann als das vorige Verfahren.

## § 34.
## Die Quadratur des Kreises und beliebiger Ausschnitte desselben.

Sowie sich die Umfänge der regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecke dem Kreisumfange desto enger anschmiegen, je grösser die Seitenzahl ist, so kommen auch die Flächen der genannten Vielecke der Kreisfläche immer näher. Zunächst erhellt nämlich sehr leicht, dass $U_{2n} < U_n$ und $E_{2n} > E_n$ sein muss, weil die mit $U_{2n}$ bezeichnete Fläche ganz innerhalb der Flächen $U_n$ und ebenso $E_n$ völlig innerhalb der Fläche $E_{2n}$ liegt; es finden daher auch hier die Beziehungen

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > U_{8n} \ldots,$$
$$E_n < E_{2n} < E_{4n} < E_{8n} \ldots$$

statt, welche eine successive Abnahme der umschriebenen und eine beständige Zunahme der eingeschriebenen Vielecksflächen beurkunden. Jene Abnahme kann aber ebenso wenig wie diese Zunahme ins Unbegrenzte gehen, da $U_n$ jedenfalls grösser und $E_n$ ebenso entschieden kleiner als die Kreisfläche bleiben muss,

und wir schliessen daraus, dass sich $U_n$ durch Abnahme einer bestimmten Grenze nähern müsse und ebenso $E_n$ durch Zunahme gleichfalls einer bestimmten Grenze. Um beurteilen zu können, ob diese beiden Grenzen verschieden sind oder nicht, benutzen wir die Gleichungen 5) und 4) in § 31, aus welchen sich ergiebt

$$\frac{U_n}{E_n} = \frac{r^2}{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}.$$

Lassen wir hier die Seitenzahl $n$ unendlich wachsen, so kann $s_n$ kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl werden, und daraus erhellt, dass sich der Quotient $U_n : E_n$ der Grenze 1 nähert und dass mithin der Grenzwert von $U_n$ dem Grenzwerte von $E_n$ gleich sein muss. Da die Fläche des Kreises, welche $K$ heissen möge, jederzeit zwischen $U_n$ und $E_n$ enthalten ist, so kann die gemeinschaftliche Grenze der $U_n$ und $E_n$ von $K$ nicht verschieden sein, weil es sonst eine Stelle geben müsste, von welcher ab $K$ nicht mehr zwischen $E_n$ und $U_n$ läge.

Nach diesen Bemerkungen ist es sehr leicht, eine Formel für den Flächeninhalt des Kreises zu entwickeln; aus der Gleichung $U_n = \frac{1}{2} r n t_n = r u_n$ folgt nämlich, wenn man $n$ ins Unendliche zunehmen lässt und berücksichtigt, dass sich $u_n$ der Grenze $2r\pi$ und $U_n$ der Grenze $K$ nähert,

1) $$K = \frac{1}{2} r \cdot 2r\pi = r^2\pi,$$

was man in folgendem Lehrsatze aussprechen kann: Die Fläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Dreiecks, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat.

Da sich ein Dreieck leicht in ein Quadrat von gleicher Fläche verwandeln lässt, so ist jetzt auch die Aufgabe gelöst: „den Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln“, welche man die Quadratur des Kreises zu nennen pflegt. Bezeichnen wir mit $q$ die Seite dieses Quadrates, so muss $q^2 = r^2\pi$, also $q = r\sqrt{\pi}$ sein und dabei in Zahlen

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\,38509\,05516\,02729.$$

Um die Fläche eines Kreisausschnittes, d. h. einer von zwei Halbmessern und einem Bogen des Kreises begrenzten Figur, zu finden, bedarf es vorerst der Bemerkung, dass ein

solcher Sektor durch den Centriwinkel, welchen die beiden Halbmesser einschliessen, vollkommen bestimmt ist, oder dass zu gleichen Centriwinkeln in einem und demselben Kreise immer gleiche Kreisausschnitte gehören. So oft sich also zwei Centriwinkel voneinander wegnehmen lassen, ebenso oft kann man den einen Sektor von dem andern wegnehmen, und hieraus schliesst man leicht, dass die Vergleichung zweier Sektoren das nämliche Resultat geben muss, wie die Vergleichung ihrer Centriwinkel, oder dass sich in demselben Kreise zwei Sektoren ebenso wie ihre Centriwinkel verhalten. Nennen wir $S$ die Fläche eines mit dem Centriwinkel $\gamma^0$ versehenen Sektors und berücksichtigen, dass dem Centriwinkel $360^0$ der Sektor $r^2\pi$, nämlich der ganze Kreis entspricht, so ist

$$360^0 : \gamma^0 = r^2\pi : S,$$

und daraus folgt unmittelbar

2) $$S = \frac{\gamma\pi}{360} r^2$$

oder, wenn die Gleichung $\frac{\gamma\pi}{360} r = \frac{\beta}{2}$ aus § 33 hiermit verbunden wird,

3) $$S = \tfrac{1}{2}\beta r,$$

d. h.: Die Fläche eines Kreisausschnittes ist einem Dreiecke gleich, welches den Bogen des Sektors zur Grundlinie und den Halbmesser desselben zur Höhe hat.

Setzt man statt $\beta$ den Wert $\frac{\gamma}{\varrho} r$, wie wir in der Formel 2) § 33 gefunden haben, so ist noch

4) $$S = \frac{\gamma}{2\varrho} r^2.$$

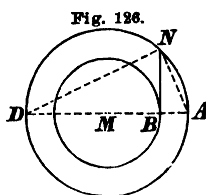
Will man z. B. denjenigen Sektor, dessen Fläche gleich dem Quadrate des Kreishalbmessers ist, so muss $S = r^2$, also $\gamma = 2\varrho = 114^0\,35'\,29'',6$ sein.

Ein paar Anwendungen, welche sich noch von der Formel 1) machen lassen, sind folgende: Um einen und denselben Mittelpunkt seien mit den Halbmessern $r$ und $\varrho$ Kreise beschrieben, so ist die von ihnen eingeschlossene ringförmige Fläche $F$

$$F = r^2\pi - \varrho^2\pi = (r^2 - \varrho^2)\pi$$
$$= [\sqrt{(r+\varrho)(r-\varrho)}]^2\pi,$$

also gleich der Fläche eines Kreises, der den Halbmesser $\sqrt{(r+\varrho)(r-\varrho)}$ besitzt, oder dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen der Summe und Differenz der beiden Halbmesser des Ringes ausmacht. $BN$ ist, senkrecht auf $AB$, der Halbmesser dieses Kreises, weil $BN$ die mittlere Proportionale zwischen $BD = r + \varrho$ und $BA = r - \varrho$ sein muss.

Fig. 126.




Beschreibt man mit den drei Seiten $a$, $b$, $c$ eines rechtwinkligen Dreiecks, als Halbmesser genommen, Kreise, so sind die Flächen der letzteren $a^2\pi$, $b^2\pi$, $c^2\pi$; dem Pythagoräischen Satze zufolge ist aber, wenn $c$ die Hypotenuse bezeichnet, $c^2 = a^2 + b^2$, mithin auch $c^2\pi = a^2\pi + b^2\pi$, d. h. der mit der Hypotenuse beschriebene Kreis ist so gross, als die mit den Katheten beschriebenen Kreise zusammen. Dasselbe gilt, wie man leicht bemerken wird, ebenso, wenn man die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nicht zu Radien, sondern zu Durchmessern dreier Kreise nimmt.

## § 35.
## Näherungskonstruktionen zur Rektifikation und Quadratur des Kreises.

Da sich mit Hilfe der höheren Mathematik nachweisen lässt, dass eine geometrische Konstruktion, welche den Umfang oder die Fläche eines Kreises in völliger Genauigkeit angäbe, nicht möglich ist, so muss man sich damit begnügen, solche Konstruktionen aufzufinden, mit deren Hilfe näherungsweise der Umfang eines Kreises in eine Gerade oder seine Fläche in ein Quadrat verwandelt werden kann. Wie man zu solchen Konstruktionen kommen kann, zeigen die nachfolgenden Entwickelungen.

*a)* Man findet leicht:

$$\frac{9+\sqrt{45}}{5} = \frac{15{,}7082039}{5} = 3{,}1416407,$$

was von $\pi$ nicht sehr verschieden ist, so dass man also näherungsweise die Peripherie

$$1)\qquad p = \frac{9+\sqrt{45}}{5}\, 2r = \frac{9+\sqrt{45}}{5}\, d$$

setzen kann, wenn $d$ den Durchmesser des Kreises bezeichnet. Dies führt unter der Bemerkung, dass die obige Gleichung identisch ist mit

$$p = \tfrac{6}{5}d + \tfrac{3}{5}d + \sqrt{(\tfrac{6}{5}d)^2 + (\tfrac{3}{5}d)^2},$$

zur folgenden Konstruktion: Man teilt den Durchmesser $d$ in fünf gleiche Teile und zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{6}{5}d$ und $\frac{3}{5}d$ sind, so ist der Umfang dieses Dreiecks nach gleich dem Umfange des gegebenen Kreises.

Umgekehrt folgt aus der Gleichung 1)

$$d = \frac{5}{9+\sqrt{45}}\, p = 5 \cdot \frac{9-\sqrt{45}}{36}\, p$$

$$= \tfrac{5}{4} \cdot \frac{9-\sqrt{45}}{9}\, p = \tfrac{5}{4}\,(1 - \sqrt{\tfrac{5}{9}})\, p,$$

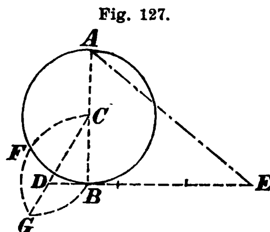
oder endlich

$$d = \tfrac{5}{4}\,\{p - \sqrt{(\tfrac{2}{3}p)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^2}\}.$$

Will man also den Durchmesser desjenigen Kreises aufsuchen, welcher einen gegebenen Umfang $p$ hat, so konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{2}{3}p$ und $\frac{1}{3}p$ sind, zieht die Hypotenuse dieses Dreiecks von $p$ ab und vergrössert den Rest um seinen vierten Teil, so ist dieser vergrösserte Rest nahe gleich dem gesuchten Durchmesser.

*b*) Etwas weniger genau ist die folgende Konstruktion, welche sich aber dadurch auszeichnet, dass man sie mit einer und derselben Zirkelöffnung ausführen kann. Man legt nämlich eine Tangente $DE$ an den Kreis und durch den Berührungspunkt einen Durchmesser $AB$. Aus dem Punkte $B$ schlägt man mit dem Halbmesser $BC$ einen Bogen, welcher den Kreis in $F$ schneidet, ferner aus $F$ wieder einen gleichen Bogen, der den vorigen in $G$ trifft; die Punkte $C$ und $G$ verbindet man durch eine Gerade, welche die Tangente in $D$ kreuzt. Nimmt man jetzt von $D$ aus die Strecke $DE$ gleich dem dreifachen Halb-

Fig. 127.



messer des Kreises und zieht $AE$, so ist diese Gerade nahe gleich dem halben Kreisumfange. Man hat nämlich, weil $BCD$ die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ausmacht, $BD = \frac{1}{2} CD = r\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} r\sqrt{12}$, $BE = 3r - \frac{1}{6} r\sqrt{12}$, mithin

$$\overline{AE}^2 = \tfrac{1}{36} \cdot 12r^2 + (3 - \tfrac{1}{6}\sqrt{12})^2 r^2$$
$$= (13\tfrac{1}{3} - \sqrt{12})\, r^2,$$
$$AE = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - \sqrt{12}}$$

oder numerisch berechnet,

$$AE = r \,.\, 3{,}1415333,$$

oder beinahe $AE = r\,.\,\pi = \frac{1}{2}\,.\,2r\pi = \frac{1}{2} p$.

*c)* Eine Konstruktion zur Quadratur des Kreises ergiebt sich aus der Bemerkung, dass $\sqrt{30} + \sqrt{150} = 17{,}7246743$, also nicht sehr verschieden von $10\sqrt{\pi}$ ist. Die Seite $q$ eines Quadrates, welches mit dem Kreise gleichen Flächeninhalt besitzt, wird aber bekanntlich durch $r\sqrt{\pi}$ ausgedrückt, daher ist näherungsweise

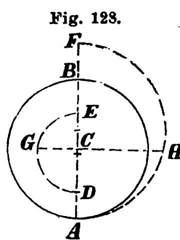
$$q = r\sqrt{\pi} = \frac{r}{10}(\sqrt{30} + \sqrt{150})$$
$$= r\sqrt{\tfrac{3}{10}} + r\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

oder

$$q = \sqrt{\tfrac{3}{5} r \,.\, \tfrac{1}{2} r} + \sqrt{r \,.\, \tfrac{3}{2} r},$$

was sich folgendermassen konstruieren lässt: Es sei $AB$ der Durchmesser des gegebenen Kreises und im Mittelpunkte $C$ stehe eine Gerade $GH$ senkrecht auf $AB$; man teile den Halbmesser $AC$ in fünf gleiche Teile, wovon $AD$ zwei sein mögen, man halbiere ferner $BC$ in $E$ und mache $BF = BE$. Beschreibt man über $DE$ einen Halbkreis, welcher $GH$ in $G$ schneidet, und ebenso über $AF$ einen Halbkreis, welcher $GH$ in $H$ trifft, so ist $GH$ nahe gleich der Seite desjenigen Quadrates, welches mit dem Kreise gleiche Fläche besitzt.

Fig. 128.




*d)* Erinnert man sich, dass, wenn $q^2 = r^2\pi$ gesetzt wird,

$$q = \sqrt{r^2\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2} pr}$$

sein muss, so kann man auch dadurch zur Quadratur des Kreises kommen, dass man erst den halben Umfang des Kreises $(\frac{1}{2} p)$

konstruiert (z. B. nach $b$) und darauf zwischen $\frac{1}{2}p$ und $r$ die mittlere Proportionale sucht.

---

## Anhang zu Kap. VII.

### Näherungsformeln für die Ludolphsche Zahl.

Da der Umfang eines mit dem Radius $r = 1$ beschriebenen Kreises $2\pi$ Längeneinheiten und seine Fläche $\pi$ Flächeneinheiten zählt, so kann man bei der Berechnung der Ludolphschen Zahl ebensowohl von den Perimetern als von den Inhalten der ein- und umgeschriebenen Vielecke ausgehen; in jenem Falle betrachtet man $2\pi$ als den Grenzwert von $e_n$ und $u_n$, in diesem Falle $\pi$ als gemeinschaftliche Grenze von $E_n$ und $U_n$. Die letztere Berechnungsweise wollen wir noch zeigen und dabei die Grenzen, zwischen denen $\pi$ liegt, so eng als möglich ziehen.

Um den bekannten Formeln

$$E_{2n} = \sqrt{E_n U_n}, \qquad U_{2n} = \frac{2 E_{2n} U_n}{E_{2n} + U_n}$$

eine bequemere Gestalt zu verleihen, bezeichnen wir die reziproken Werte von $E$ und $U$ mit $E'$ und $U'$, setzen also

$$\frac{1}{E_n} = E'_n, \qquad \frac{1}{U_n} = U'_n$$

und erhalten auf diese Weise

$$1) \qquad E'_{2n} = \sqrt{E'_n U'_n}, \qquad U'_{2n} = \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + U'_n).$$

Lassen wir an die Stelle des geometrischen Mittels das grössere arithmetische Mittel treten, so gehen die vorigen Beziehungen in die folgenden über:

$$E'_{2n} < \tfrac{1}{2}(E'_n + U'_n), \qquad U'_{2n} = \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + U'_n),$$

oder wenn $U'_n$ für den Augenblick $= a$ und $E'_n = a + d$ gesetzt wird,

$$E'_{2n} < a + \tfrac{1}{2}d, \qquad U'_{2n} = \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + a),$$

d. i., indem man für $E'_{2n}$ rechter Hand das zu grosse $a + \frac{1}{2}d$ nimmt,

$$E'_{2n} < a + \tfrac{1}{2}d, \qquad U'_{2n} < a + \tfrac{1}{4}d.$$

Auf gleiche Weise hat man weiter

$$E'_{4n} < \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + U'_{2n}), \qquad U'_{4n} = \tfrac{1}{2}(E'_{4n} + U'_{2n})$$

und, indem man überall die zu grossen Werte einsetzt,

$$E'_{4n} < a + \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{8}d, \qquad U'_{4n} < a + \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{16}d.$$

Aus den Beziehungen

$$E'_{8n} < \tfrac{1}{4}(E'_{4n} + U'_{4n}), \qquad U'_{8n} = \tfrac{1}{2}(E'_{8n} + U'_{4n})$$

findet man nach demselben Verfahren

$$E'_{8n} < a + \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{16}d + \tfrac{1}{32}d,$$
$$U'_{8n} < a + \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{16}d + \tfrac{1}{64}d.$$

Indem man auf diesem Wege bis zur gemeinschaftlichen Grenze von $E'$ und $U'$, nämlich bis zu $\frac{1}{\pi}$ fortgeht, erhält man die Ungleichung

$$\frac{1}{\pi} < a + \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{16}d + \tfrac{1}{64}d + \tfrac{1}{256}d + \cdots$$

und durch Summierung der Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$

$$\frac{1}{\pi} < a + \tfrac{1}{3}d.$$

Vermöge der Bedeutung von $a$ und $d$ ist dies soviel wie

$$\frac{1}{\pi} < U'_n + \tfrac{1}{3}(E'_n - U'_n)$$

oder wenn man die Werte von $E'_n$ und $U'_n$ einsetzt und umkehrt,

2) $$\pi > \frac{E_n U_n}{E_n + \frac{1}{3}(U_n - E_n)}.$$

Eine analoge Ungleichung ergiebt sich aus den Gleichungen 1), wenn man das arithmetische Mittel durch das kleinere geometrische ersetzt; es ist dann

$$E'_{2n} = \sqrt{E'_n U'_n}, \qquad U'_{2n} > \sqrt{E'_{2n} U'_n}$$

oder, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$\log E'_{2n} = \tfrac{1}{2}(\log E'_n + \log U'_n), \quad \log U'_{2n} > \tfrac{1}{2}(\log E'_{2n} + \log U'_n).$$

Bezeichnet man überhaupt $\log E'$ mit $E''$, so kann man die Beziehungen

$$E''_{2n} = \tfrac{1}{2}(E''_n + U''_n), \qquad U''_{2n} > \tfrac{1}{2}(E''_{2n} + U''_n)$$

auf gleiche Weise wie die früheren behandeln. Man findet nämlich für $U''_n = \alpha$, $E''_n = \alpha + \delta$

$$E''_{2n} = \alpha + \tfrac{1}{2}\delta, \qquad U''_{2n} > \alpha + \tfrac{1}{4}\delta,$$
$$E''_{4n} > \alpha + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{8}\delta, \qquad U''_{4n} > \alpha + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{16}\delta$$

u. s. w.

der gemeinschaftliche Grenzwert ist

$$log\left(\frac{1}{\pi}\right) > \alpha + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{16}\delta + \tfrac{1}{64}\delta + \cdots$$

oder

$$log\left(\frac{1}{\pi}\right) > \alpha + \tfrac{1}{3}\delta.$$

Setzt man die Werte von $\alpha$ und $\delta$ wieder ein, nämlich

$$\alpha = log\, U'_n = log\left(\frac{1}{U_n}\right),$$
$$\delta = log\, E'_n - log\, U'_n = log\left(\frac{U_n}{E_n}\right)$$

und geht von den Logarithmen zu den Zahlen zurück, so erhält man

3) $$\pi < \sqrt[3]{E_n U_n^2}.$$

Mit einer geringen Aufopferung von Genauigkeit lassen sich die Ungleichungen 2) und 3) so umwandeln, dass sie eine bequeme und grosse Annäherung gewährende Formel liefern, wie noch gezeigt werden soll.

Setzt man zur Abkürzung in Nr. 2)

$$\frac{U_n - E_n}{E_n} = \xi \quad \text{mithin} \quad U_n = E_n(1 + \xi),$$

so erhält man

4) $$\pi > E_n \frac{1 + \xi}{1 + \frac{1}{3}\xi}.$$

Es ist nun identisch für jedes beliebige $\xi$

$$\frac{1 + \xi}{1 + \frac{1}{3}\xi} = 1 + \tfrac{2}{3}\xi - \tfrac{2}{9}\xi^2 + \tfrac{2}{27}\cdot\frac{\xi^3}{1 + \frac{1}{3}\xi};$$

durch Weglassung des positiven letzten Summanden rechter Hand wird die rechte Seite kleiner, folglich

$$\frac{1 + \xi}{1 + \frac{1}{3}\xi} > 1 + \tfrac{2}{3}\xi - \tfrac{2}{9}\xi^2$$

und um so mehr nach Nr. 4)

$$\pi > E_n(1 + \tfrac{2}{3}\xi - \tfrac{2}{9}\xi^2),$$

d. i. vermöge des Wertes von $\xi$

5) $$\pi > E_n + \tfrac{2}{3}(U_n - E_n) - \tfrac{2}{9}\cdot\frac{(U_n - E_n)^2}{E_n}.$$

Setzt man zweitens in Nr. 3)

$$\frac{U_n - E_n}{U_n} = \eta \quad \text{mithin} \quad E_n = U_n(1 - \eta),$$

so erhält man

6) $$\pi < U_n\sqrt[3]{1 - \eta}.$$

Für jede beliebige Grösse $\zeta$ gilt nun die identische Gleichung

$$\zeta + \tfrac{1}{9}(1 - \zeta)^3(5 + 6\zeta + 3\zeta^2 + \zeta^3)$$
$$= 1 - \tfrac{1}{3}(1 - \zeta^3) - \tfrac{1}{9}(1 - \zeta^3)^2,$$

und im speciellen Falle eines positiven echt gebrochenen $\zeta$ sind die beiden links stehenden Summanden positiv. Lässt man unter dieser Voraussetzung den zweiten Summanden weg, so wird die linke Seite kleiner, daher

$$\zeta < 1 - \tfrac{1}{3}(1 - \zeta^3) - \tfrac{1}{9}(1 - \zeta^3)^2$$

oder für $\zeta = \sqrt[3]{1 - \eta}$, wobei $\eta$ gleichfalls ein positiver echter Bruch sein muss,

$$\sqrt[3]{1 - \eta} < 1 - \tfrac{1}{3}\eta - \tfrac{1}{9}\eta^2.$$

Die Bedingung $0 < \eta < 1$ ist in Nr. 6) erfüllt wegen

$$\eta = 1 - \frac{E_n}{U_n} \quad \text{und} \quad E_n < U_n,$$

daher folgt

$$\pi < U_n(1 - \tfrac{1}{3}\eta - \tfrac{1}{9}\eta^2)$$

oder nach der Bedeutung von $\eta$

7) $$\pi < U_n - \tfrac{1}{3}(U_n - E_n) - \tfrac{1}{9}\cdot\frac{(U_n - E_n)^2}{U_n}.$$

Giebt man den Ungleichungen 5) und 7) die Formen

$$\pi > \tfrac{1}{3}(2U_n + E_n) - \tfrac{2}{9}\cdot\frac{(U_n - E_n)^2}{E_n},$$

$$\pi < \tfrac{1}{3}(2U_n + E_n) - \tfrac{1}{9}\cdot\frac{(U_n - E_n)^2}{U_n},$$

so bemerkt man, dass rechter Hand die Minuenden übereinstimmen und dass bei einigermassen grossen $n$ die Subtrahenden sehr wenig betragen; es ist daher

8) näherungsweis $\pi = \frac{1}{3}(2\,U_n + E_n)$.

Beispielsweis ergeben sich aus $E_4 = 2$, $U_4 = 4$ die Werte

| | |
|---|---|
| $E_8 = 2{,}8284\,2712$ | $U_8 = 3{,}3137\,0849$ |
| $E_{16} = 3{,}0614\,6745$ | $U_{16} = 3{,}1825\,9787$ |
| $E_{32} = 3{,}1214\,4515$ | $U_{32} = 3{,}1517\,2490$ |
| $E_{64} = 3{,}1365\,4849$ | $U_{64} = 3{,}1441\,1838$ |
| $E_{128} = 3{,}1403\,3115$ | $U_{128} = 3{,}1422\,2362$ |

Nach Nr. 8) hat man also näherungsweis

$$\pi = \frac{1}{3}(2\,U_{128} + E_{128}) = 3{,}1415\,9280,$$

was bei Abkürzung auf sechs Decimalen in ebenso viel Stellen richtig ist.

